Capítulo 1

Esfuerzos

1.1 Introducción

El *análisis de esfuerzos* tiene como objetivo fundamental la determinación de las dimensiones que debe tener un elemento mecánico o estructural a fin de que no falle durante su funcionamiento. En el cálculo de estas dimensiones intervienen, como es de suponer, la forma del elemento y las propiedades mecánicas del material.

En un sentido amplio, se considera que un elemento mecánico o estructural ha fallado cuando se vuelve incapaz de desempeñar con seguridad la función para la cual fue diseñado. En nuestro estudio serán considerados dos tipos básicos de falla: la falla por fractura y la falla por deformación plástica.

Nuestro propósito consistirá en presentar de manera unificada y coherente los principios y conceptos que son fundamentales para el análisis de esfuerzos. A partir de estos conceptos básicos se establecerán relaciones de naturaleza cuantitativa que permitan sentar las bases para la predicción del comportamiento de un sólido en términos de su resistencia mecánica y de su rigidez cuando se le somete a un sistema de cargas externas. Los primeros

ideas que se manejarán a lo largo de este estudio estarán vinculadas a los conceptos de *esfuerzo*, *deformación*, *desplazamiento*, *resistencia* y *falla*, los cuales son esenciales en el estudio de varias disciplinas tales como Resistencia de Materiales, Mecánica de Sólidos, Análisis de Estructuras, Teoría de Elasticidad, Teoría de Plasticidad, Mecánica de Fractura y Mecánica de Suelos.

En este primer capítulo se definirán con precisión los conceptos de vector esfuerzo, fuerzas de volumen, esfuerzo normal, esfuerzo tangencial, matriz de esfuerzos y esfuerzos principales. El teorema de Cauchy será presentado y deducido con toda claridad de manera que su utilización posterior para plantear condiciones de borde sea percibida de una manera natural. Este teorema servirá también para evaluar la transformación que experimentan las componentes de la matriz de esfuerzos cuando se realiza un cambio de coordenadas, así como para demostrar las propiedades fundamentales de los esfuerzos principales. Los métodos gráficos basados en los círculos de Mohr serán presentados desde el principio con toda generalidad para el caso tridimensional y después, en forma particular, para el caso de un estado plano de esfuerzos. Por último, las ecuaciones de equilibrio serán presentadas con la mayor naturalidad en su forma integral y posteriormente, utilizando el teorema de la divergencia, su forma diferencial será deducida.

1.2 Algo de Historia

Se tiene conocimiento que desde la época de los antiguos egipcios se manejaron reglas empíricas que hicieron posible la construcción de grandes templos, monumentos y pirámides[1]. Los griegos y los romanos fueron también constructores prominentes. Sin embargo, el análisis de esfuerzos como una disciplina de carácter científico tuvo sus orígenes en los estudios y experimentos inicialmente realizados por Leonardo da Vinci a finales del siglo XV, mientras que los primeros intentos para determinar en forma analítica las dimensiones seguras de una estructura se iniciaron hace más de trescientos años, entre 1638 y 1686, con los trabajos científicos de Galileo Galilei, Robert Hooke y E. Mariotte. Las contribuciones de Jacob Bernoulli, Leonard Euler, J.

[1] Para más detalles sobre el desarrollo histórico de este campo del conocimiento, se recomienda consultar el libro de Stephen P Timoshenko *"History of Strength of Materials"*, Dover Publications, New York, 1983. Una exposición más restringida puede verse también en el libro de A. E. H. Love *"A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity"*, Fourth Edition, Dover Publications, New York, 1944.

Lagrange y Charles Coulomb en el período 1705-1784 extendieron estos estudios previos a la determinación de las deformaciones de vigas y columnas.

Con el establecimiento de las primeras escuelas de ingeniería en Francia a finales del siglo XVIII, el análisis de esfuerzos experimentó un desarrollo excepcional mediante la contribución de notables científicos como Louis Navier, Augustin Cauchy, Simeon Poisson, Gabriel Lamé y Barré de Saint-Venant. Estos investigadores, a partir de una síntesis de las soluciones a los problemas específicos que de manera fragmentada habían sido resueltos hasta esa época, formularon una teoría general para el análisis lineal de esfuerzos entre los años 1820 y 1855, la cual ha permanecido prácticamente invariable hasta nuestros días[2]. Los trabajos posteriores realizados por ThomasYoung, J. Poncelet, W. Rankine, E. Betti, Gustave Kirchhoff, Friedrich Engesser, Otto Mohr, Lord Rayleigh, Alberto Castigliano y Heinrich Hertz, entre otros, contribuyeron también de manera extraordinaria con el desarrollo de este campo del conocimiento durante el siglo XIX.

Durante la primera mitad del siglo XX las investigaciones estuvieron muy orientadas hacia la creación de diferentes métodos analíticos y numéricos para la solución de problemas gobernados por la formulación matemática desarrollada en los años precedentes. Los trabajos liderizados en Rusia por G. Kolosoff, N. Muskhelishvili y B. Galerkin merecen en este aspecto un reconocimiento especial. Bajo el impulso generado por la creación de nuevos equipos y técnicas de medición, el diseño y montaje de novedosos experimentos para evaluar el comportamiento mecánico de diversos materiales bajo diferentes condiciones de carga ocupó también un lugar preponderante en esta época. Es así como entre los años 1900 y 1924 fueron propuestas nuevas teorías de falla, con una base experimental, por J. Guest, M. Huber y R. von Mises. Con el desarrollo de modernas máquinas y medios de transporte, el estudio de las fallas producidas por cargas cíclicas y la resistencia de los metales a elevadas temperaturas ocupó de igual manera la atención de numerosos investigadores como A. Wöhler, A. Griffith, R. Peterson, W. Rosenhain, A. Cottrell, F. Larson y J. Miller, entre muchos otros. El análisis de esfuerzos no lineal y la teoría de plasticidad se convirtieron también, entre los años 1913 y 1944, en una rama importantísima del análisis de esfuerzos con los trabajos de R. von Mises, L. Prandtl, H. Hencky, A. Nádái y R. Hill.

Con el advenimiento del computador digital a mediados de la década de los 50, surgieron métodos numéricos poderosos para la solución de problemas de análisis de esfuerzos de la más variada índole. El *Método del Elemento Finito*, desarrollado en Estados Unidos entre los años 1955 y 1960 por J.

[2] I. S. Sokolnikoff, *"Mathematical Theory of Elasticity"*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1974, pp. 1-4.

Argyris, R. Clough, M. Turner, H. Martin y L. Topp, ha tenido un impacto extraordinario en varios campos de la ingeniería, habiéndose convertido hoy en día en una herramienta de cálculo de uso cotidiano[3]. El *Método de los Elementos de Frontera*, desarrollado inicialmente por F. Rizzo[4] a finales de la década de los 60, ha llegado a ser también un instrumento útil para el análisis de esfuerzos. Su efectividad computacional es mayor que la del método del elemento finito, pero su concepción es de uso más restringido. Más recientemente, los denominados *Métodos sin Malla* han venido recibiendo una amplia atención por parte de notables investigadores en el campo del análisis de esfuerzos[5]. Estos métodos, aún cuando se encuentran actualmente en una etapa relativamente incipiente de su desarrollo, prometen ser de gran rendimiento en el futuro cercano debido a que la etapa de pre-procesamiento de datos se simplifica sustancialmente al estar centrada la construcción de la aproximación enteramente en los nodos y no en los elementos.

1.3 Vector Esfuerzo

En el estudio que se llevará a cabo no se tomará en cuenta la estructura atómica o molecular de la materia, la cual, como bien se sabe, es exhibida por todos los materiales cuando se analizan a escala microscópica. En su lugar, se adoptará un enfoque de tipo macroscópico, el cual nos permitirá utilizar las poderosas herramientas de análisis que nos proporciona la matemática de las funciones seccionalmente continuas. A tales efectos se considerará como hipótesis fundamental que la materia se encuentra distribuida de una manera continua sobre todo el volumen del sólido, llenando por completo el espacio que ocupa. De esta forma, un sólido será interpretado y analizado mediante un modelo matemático de *medio continuo* en el cual cada punto material se identifica con el punto geométrico de la región ocupada por el cuerpo. Los resultados obtenidos mediante el uso de este modelo de medio continuo han

[3] Una excelente revisión histórica de este método, descrita por uno de sus creadores, puede revisarse en el artículo de R. W. Clough (1980) "The finite element method after twenty-five years: A personal view", Computers & Structures, Vol. 12, pp.361-370.

[4] F. J. Rizzo (1967). "An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 25, No. 1, pp. 83-95.

[5] Una revisión de los primeros métodos sin malla desarrollados puede encontrarse en el artículo de T. Belytschko y otros (1996). "Meshless methods: An overview and recent developments", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, pp. 3-47.

sido utilizados con todo éxito durante muchos años en el diseño de máquinas y estructuras de la más variada índole, tales como vehículos, aviones, cohetes, turbinas, bombas, compresores, reactores químicos y nucleares, edificios, puentes, torres de transmisión de energía eléctrica, etc., así como también en el estudio de la resistencia estructural de los suelos.

Considérese entonces un sólido que ocupa una región Ω del espacio, cuya frontera es la superficie Γ, sometido a un sistema general de cargas externas, tal como se muestra en la Fig. 1.1.

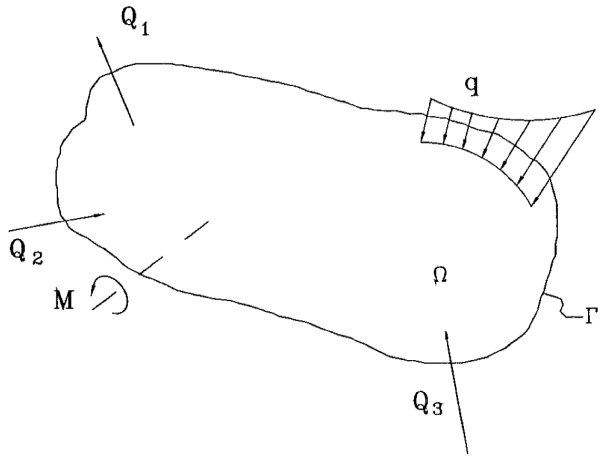


Figura 1.1 Sólido sometido a un sistema general de cargas externas

Las cargas aplicadas al sólido suelen agruparse convenientemente en *fuerzas de superficie*, que resultan del contacto directo entre dos cuerpos, y en *fuerzas de volumen*, que son proporcionales a la masa del sólido y provienen de acciones de campo tales como las fuerzas de la gravedad. El comportamiento mecánico del sólido depende esencialmente del modo según el cual las cargas externas aplicadas se distribuyen y trasmiten en el interior del cuerpo. Sea entonces Σ un plano imaginario que divide al sólido en dos partes Ω^+ y Ω^- (Fig. 1.2).

La interacción entre Ω^+ y Ω^- se expresa por medio de las fuerzas internas infinitesimales[6] $\Delta\mathbf{F}_1$, $\Delta\mathbf{F}_2$, . . . ,$\Delta\mathbf{F}_i$, que se transmiten a través del plano Σ, como se observa en la Fig. 1.3.

[6] Como es usual, los vectores y las matrices se representarán en letras negrillas.

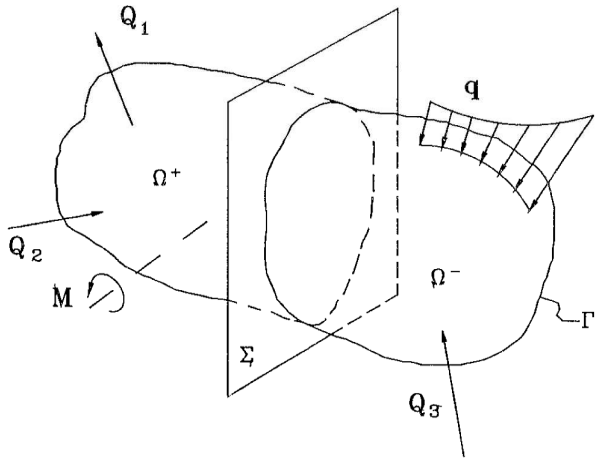


Figura 1.2 Plano imaginario que divide al sólido en dos partes Ω^+ y Ω^-

En general, estas fuerzas internas actúan sobre áreas infinitesimales del plano considerado, varían de punto a punto y están inclinadas con respecto a dicho plano.

Sea *oxyz* un sistema ortonormal de coordenadas y sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ el vector de posición de una partícula genérica $P(x,y,z)$ ubicada en el plano Σ, donde **i**, **j** y **k** son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes x, y y z, respectivamente.

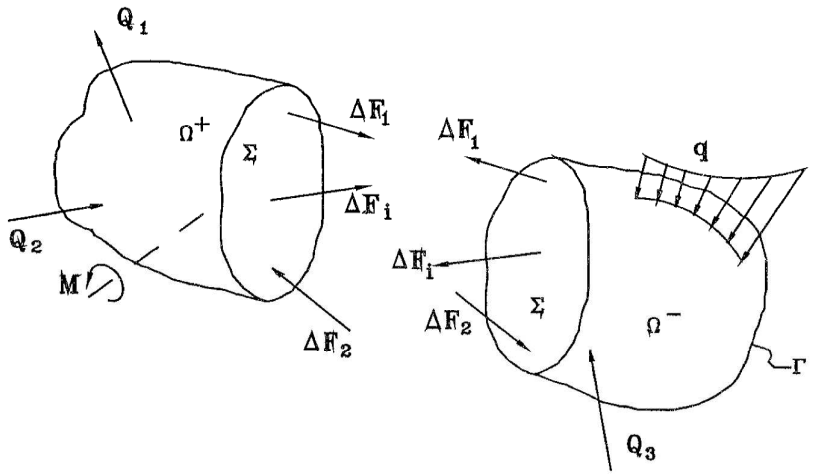


Figura 1.3 Distribución interna de cargas

Sea ΔA un área pequeña que contiene a P sobre la cual actúa la fuerza resultante $\Delta\mathbf{F}$ y sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal al plano Σ (Fig. 1.4).

El *vector esfuerzo* $\mathbf{T}$ en el punto P del plano Σ se define como el valor límite de la fuerza resultante por unidad de área cuando el área tiende a cero. Es decir

$$\mathbf{T} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA} \tag{1.1}$$

Esta definición del vector esfuerzo surgió como una generalización del concepto de *presión* en Mecánica de Fluidos y fue presentada por primera vez en la Academia de Ciencias de París en 1822 por el célebre matemático francés Augustin-Louis Cauchy[7] (1789-1857). En su forma final, tal como se ha presentado aquí, la definición de esfuerzo se debe al destacado ingeniero Barré de Saint-Venant (1797-1886), también de la escuela francesa.

En algunos libros y artículos sobre este tema, al vector esfuerzo se le llama también con cierta frecuencia *vector tracción*.

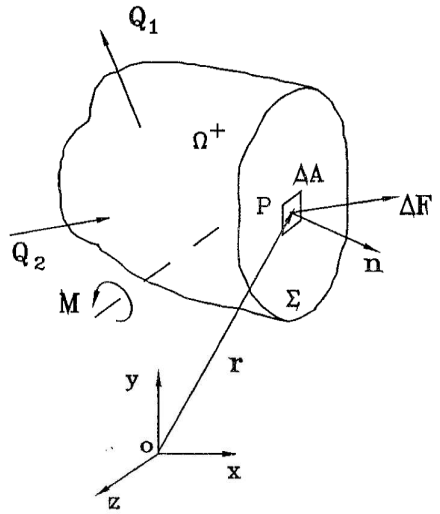


Figura 1.4 Vector Esfuerzo

[7] S. P. Timoshenko *"History of Strength of Materials"*, Dover Publications, New York, 1983, pp. 107-111.

Figura 1.5 Augustin-Louis Cauchy[8] (1789-1857)

Debe quedar claro en el presente contexto que el vector esfuerzo es una función vectorial de las variables vectoriales **r** y **n**; esto es, $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$, puesto que para establecer la definición (1.1) se ha tomado un punto específico con vector de posición **r** sobre un plano de normal **n**. Sería, por lo tanto, ambiguo decir "*El vector esfuerzo en un punto...*", puesto que en cada punto del sólido existen infinitos vectores esfuerzo (uno por cada plano que pase por el punto). Así, pues, además de especificar el punto, debe hacerse referencia explícita al plano sobre el cual se efectúa el proceso de límite, indicando así que se está hablando del esfuerzo en un punto que pertenece a un plano específico del sólido en consideración.

Tampoco debe olvidarse que, en general, el vector esfuerzo no es perpendicular al plano Σ. En realidad, tal como se verá más adelante, resulta de gran utilidad descomponer el vector esfuerzo en dos componentes ortogonales, como se observa en la Fig. 1.6.

Se llama componente normal del vector esfuerzo, o simplemente *esfuerzo normal* σ, a la proyección de **T** en la dirección de la normal **n**, la cual puede obtenerse como el producto escalar

$$\sigma = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \tag{1.2a}$$

[8] Biografía en http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Cauchy.html

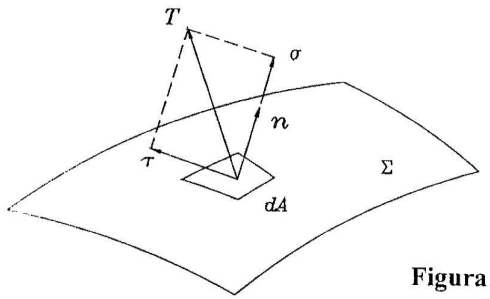


Figura 1.6 Componentes normal y tangencial del vector esfuerzo

o bien como el producto matricial

$$\sigma = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} \tag{1.2b}$$

donde **T** y **n** se escriben como vectores columna y $\mathbf{T}^T$ es el traspuesto del vector **T**.

De una manera similar, la componente tangencial del vector esfuerzo, denominada *esfuerzo tangencial* o *cortante* τ, se define como

$$\tau = |\mathbf{T} - \sigma \mathbf{n}| = \sqrt{T^2 - \sigma^2} \tag{1.3}$$

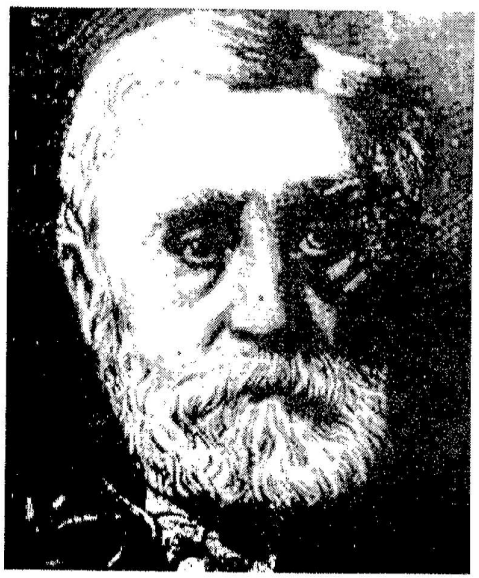


Figura 1.7 Barré de Saint-Venant[9] (1797-1886)

[9] Biografía en http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Saint-Venant.html

En el Sistema Internacional de Unidades (SI) la fuerza se expresa en newtons (N) y el área en metros cuadrados (m^2), de manera que el vector esfuerzo viene expresado entonces en N/m^2, unidad denominada *pascal* (Pa). Si se utiliza esta unidad para manejar los valores que usualmente tienen los esfuerzos, los números resultantes serían muy grandes, razón por la cual es práctica corriente utilizar múltiplos del pascal tales como el *kilopascal* (1 kPa = 10^3 Pa = 10^3 N/m^2) y el *megapascal* (1 MPa = 10^6 Pa = 10^3 kPa = 1 N/mm^2).

Aún cuando las unidades de medida del sistema legal venezolano están basadas en Sistema Internacional de Unidades[10], en él se permite también el uso del *kilogramo-fuerza por centímetro cuadrado* (kgf/cm^2) y el *kilogramo-fuerza por milímetro cuadrado* (kgf/mm^2) como unidades de esfuerzo. Aún hoy en día es práctica normal en nuestro país utilizar también otras unidades como la *libra-fuerza por pulgada cuadrada* (psi) y la *kilolibra-fuerza por pulgada cuadrada* (ksi). Algunas de las equivalencias entre estas unidades son las siguientes

1 kgf/cm^2 = 98 kPa
1 kgf/mm^2 = 100 kgf/cm^2
1 MPa = 10.2 kgf/cm^2
1 kgf/cm^2 = 14.2 psi
1 psi = 6.9 kPa

1.4 Fuerzas de Volumen

Se denominan fuerzas de volumen a aquellas cuya magnitud es proporcional a la masa contenida en el volumen ocupado por el sólido. Son ejemplos de ellas las fuerzas gravitacionales e inerciales, entre otras.

Considérese entonces un elemento de volumen ΔV que contiene al punto P de vector de posición $\mathbf{r}$ (Fig. 1.8). Sea $\Delta\mathbf{F}$ la resultante de las fuerzas de volumen sobre ΔV.

El *vector intensidad de las fuerzas de volumen* $\mathbf{f}$ se define como

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} \tag{1.4}$$

[10] *Unidades de Medida del Sistema Legal Venezolano*, Gaceta Oficial de la República de Venezuela, No. 2823 (extraordinario), 14 de julio de 1981.

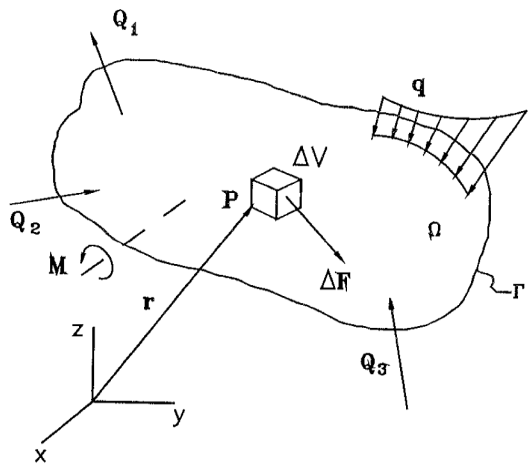


Figura 1.8 Fuerzas de volumen

El vector $\mathbf{f}$, a diferencia del vector esfuerzo, es una función vectorial de la variable $\mathbf{r}$ únicamente.

En el caso, por ejemplo, de que la única fuerza de volumen presente sea la de la gravedad, se tendrá que

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \frac{d}{dV}(m\mathbf{g}) = \mathbf{g}\frac{dm}{dV} = \rho\mathbf{g} \tag{1.5}$$

donde $\rho = dm/dV$ es la densidad del material en el punto considerado y $\mathbf{g}$ es el vector aceleración de la gravedad.

1.5 Matriz de Esfuerzos

En la Sec. 1.3 quedó establecido que el vector esfuerzo $\mathbf{T}$ depende de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$. Por ahora vamos a mantener fijo el punto con vector de posición $\mathbf{r}$ y vamos a estudiar la dependencia de $\mathbf{T}$ con la normal $\mathbf{n}$. El objetivo que se persigue es claro: se desea resolver la dificultad asociada al hecho de que en cada punto existan infinitos vectores esfuerzo.

Considérese entonces un elemento de volumen, como el mostrado en la Fig. 1.9, extraído del sólido bajo análisis en el punto con vector de posición **r**. Sea *XYZ* un sistema de coordenadas paralelo a *xyz* con origen en **r**.

Sobre cada uno de los seis planos coordenados, con normales **i**, **-i**, **j**, **-j**, **k** y **-k** actuarán, respectivamente, los vectores esfuerzo **T(r, i)**, **T(r, -i)**, **T(r, j)**, **T(r, -j)**, **T(r, k)** y **T(r, -k)**, no necesariamente ortogonales a dichos planos. En la Fig. 1.9 se han representado los vectores esfuerzo únicamente en los planos cuyas normales apuntan en la dirección positiva de los ejes coordenados.

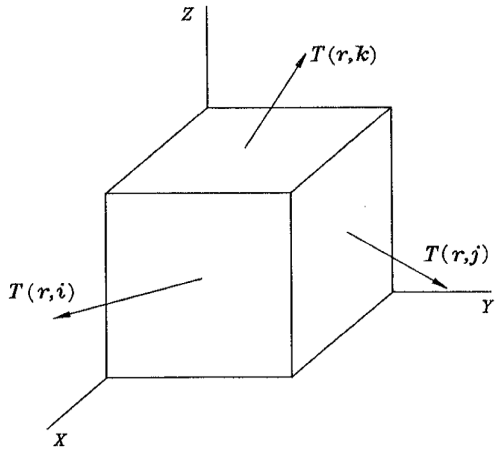


Figura 1.9 Vectores esfuerzo en los planos coordenados

Si se descompone cada uno de los vectores esfuerzo en tres componentes cartesianas, se tendrá que una de ellas será normal y las otras dos serán tangenciales al plano correspondiente (ver Fig. 1.10). Así, por ejemplo, el vector esfuerzo **T(r, i)** tendrá una componente normal que coincide con la dirección del eje *x*, la cual se designa con σ_x, mientras que las componentes tangenciales tendrán las dirección de los ejes *y* y *z*. Como estos dos esfuerzos tangenciales actúan en el plano que es ortogonal al eje *x*, se designarán con τ_{xy} y τ_{xz}, respectivamente. Con esta notación se quiere decir que el esfuerzo τ_{xy} es un esfuerzo tangencial al plano cuya normal es paralela al eje *x* (primer subíndice) y que actúa en la dirección del eje *y* (segundo subíndice), mientras que el esfuerzo τ_{xz} es un esfuerzo tangencial al referido plano pero que actúa en la dirección del eje *z* (ver Fig. 1.10).

Análogamente, el vector esfuerzo **T(r, j)** se descompone en un esfuerzo σ_y normal al plano y en dos esfuerzos tangenciales τ_{yx} y τ_{yz}, uno paralelo al eje *x* y otro paralelo al eje *z*, respectivamente. De la misma forma, el vector esfuerzo **T(r, k)** tendrá por componentes σ_z, τ_{zx} y τ_{zy}.

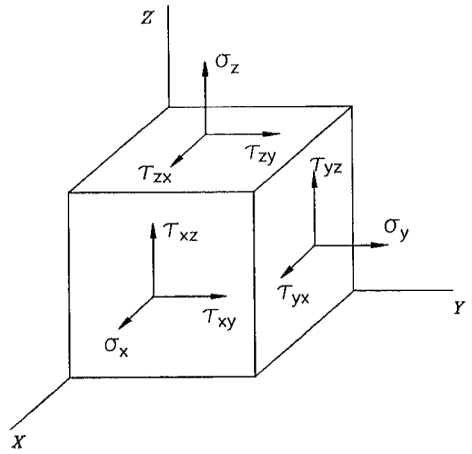


Figura 1.10 Componentes de la matriz de esfuerzos

De una manera similar puede procederse con los vectores **T(r, -i)**, **T(r, -j)** y **T(r, -k)**. En la Fig. 1.10 se han representado únicamente las componentes de los vectores esfuerzo que actúan sobre los planos con normales apuntando en la dirección positiva de los ejes coordenados.

Cuantitativamente, las componentes normales y tangenciales de los vectores esfuerzo que actúan sobre los planos coordenados pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \mathbf{T(r,i)} \circ \mathbf{i}, & \tau_{xy} &= \mathbf{T(r,i)} \circ \mathbf{j}, & \tau_{xz} &= \mathbf{T(r,i)} \circ \mathbf{k} \\ \tau_{yx} &= \mathbf{T(r,j)} \circ \mathbf{i}, & \sigma_y &= \mathbf{T(r,j)} \circ \mathbf{j}, & \tau_{yz} &= \mathbf{T(r,j)} \circ \mathbf{k} \\ \tau_{zx} &= \mathbf{T(r,k)} \circ \mathbf{i}, & \tau_{zy} &= \mathbf{T(r,k)} \circ \mathbf{j}, & \sigma_z &= \mathbf{T(r,k)} \circ \mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Los vectores esfuerzo podrían ser entonces escritos como

$$\mathbf{T(r,i)} = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \tag{1.7a}$$

$$\mathbf{T(r,j)} = \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \tag{1.7b}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k} \quad \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \tag{1.7c}$$

Como se verá más adelante, estas nueve componentes de los vectores esfuerzo definen completamente el *estado de esfuerzos* en un punto de un sólido, en el sentido de que, una vez conocidas, el vector esfuerzo $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ en un plano cualquiera de normal $\mathbf{n}$ que pase por ese punto puede determinarse.

Por comodidad, estas componentes suelen escribirse en forma matricial como

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

donde σ es la llamada *matriz de esfuerzos*.

Puede demostrarse, como en efecto se hará posteriormente, que esta matriz es simétrica. Es decir

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{1.9}$$

O, más concretamente,

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Antes de proseguir con nuestro análisis, estableceremos por conveniencia la siguiente

Convención de Signos

• *Planos:* Se considera que un plano coordenado es positivo si su normal (saliente del elemento de volumen) apunta en la dirección positiva de un eje coordenado. En caso contrario el plano será considerado negativo. Así, por ejemplo, los planos *PBC*, *PAC* y *PAB* en la Fig. 1.11 son negativos (¿por qué?).

• *Esfuerzos normales:* Un esfuerzo normal se considera positivo si es de *tracción* y negativo si es de *compresión*. Los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z en la Fig. 1.10 son positivos (¿por qué?).

• *Esfuerzos tangenciales:* Un esfuerzo tangencial es positivo si, actuando en un plano positivo (o negativo), apunta en la dirección positiva (o negativa) de un eje coordenado. Por el contrario, un esfuerzo tangencial será negativo si, actuando en un plano positivo (o negativo), apunta en la dirección negativa (o positiva) de un eje coordenado. Por ejemplo, los esfuerzos τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz} en la Fig. 1.10 son positivos (¿por qué?).

Estamos ahora preparados para la demostración de un teorema fundamental en el análisis de esfuerzos.

Teorema de Cauchy

Sea Ω la región ocupada por un sólido, $\mathbf{r}$ el vector de posición de un punto genérico en Ω y $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ el vector esfuerzo en $\mathbf{r}$ sobre un plano de normal $\mathbf{n}$. Entonces

$$\mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{n} \tag{1.11}$$

donde σ es la matriz de esfuerzos en $\mathbf{r}$.

Demostración:

Pasemos un plano oblicuo de normal $\mathbf{n}$ por el elemento de volumen de la Fig. 1.9 y aislemos, a manera de diagrama de cuerpo libre, el tetraedro infinitesimal que resulta (llamado *tetraedro de Cauchy*), como se muestra en la Fig. 1.11. Sean α, β y γ los ángulos que forma el vector $\mathbf{n}$ con los ejes x, y y z, respectivamente. Sea $\mathbf{f}$ el vector intensidad de las fuerzas de volumen en $\mathbf{r}$.

Sobre cada una de los planos coordenados actúan los vectores esfuerzo $\mathbf{T}(\mathbf{r}, -\mathbf{i})$, $\mathbf{T}(\mathbf{r}, -\mathbf{j})$ y $\mathbf{T}(\mathbf{r}, -\mathbf{k})$, mientras que sobre el plano de normal $\mathbf{n}$ actúa el vector $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$. Si se designa con ΔA al área del plano *ABC*, entonces puede demostrarse que las áreas de los planos *PBC*, *PAC* y *PAB* serán

$$\begin{aligned} &\textit{Area del plano } PBC = \Delta A \cos\alpha \\ &\textit{Area del plano } PAC = \Delta A \cos\beta \\ &\textit{Area del plano } PAB = \Delta A \cos\gamma \end{aligned}$$

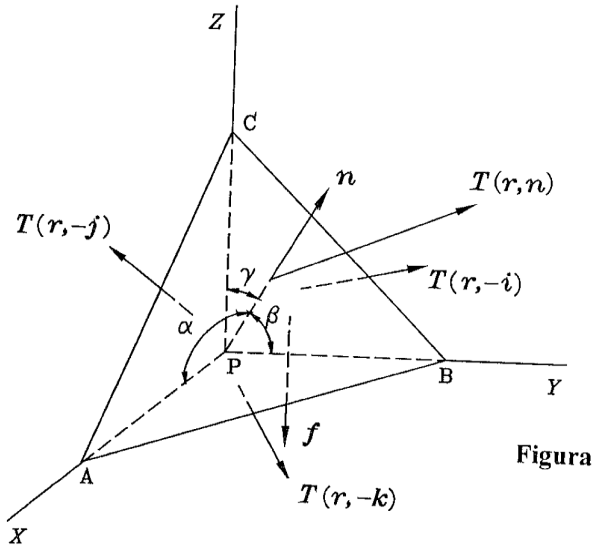


Figura 1.11 Tetraedro de Cauchy

Las fuerzas que actúan sobre el tetraedro vienen dadas por

Resultante de fuerzas sobre ABC = $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n})\,\Delta A$
Resultante de fuerzas sobre PBC = $\mathbf{T}(\mathbf{r}, -\mathbf{i})\,\Delta A \cos\alpha$
Resultante de fuerzas sobre PAC = $\mathbf{T}(\mathbf{r}, -\mathbf{j})\,\Delta A \cos\beta$
Resultante de fuerzas sobre PAB = $\mathbf{T}(\mathbf{r}, -\mathbf{k})\,\Delta A \cos\gamma$
Resultante de las fuerzas de volumen = $\mathbf{f}\,\Delta V$

donde ΔV es el volumen del tetraedro.

Planteando ahora la ecuación del equilibrio de fuerzas para el tetraedro se tiene

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n})\Delta A + \mathbf{T}(\mathbf{r},-\mathbf{i})\Delta A\cos\alpha + \mathbf{T}(\mathbf{r},-\mathbf{j})\Delta A\cos\beta + \mathbf{T}(\mathbf{r},-\mathbf{k})\Delta A\cos\gamma + \mathbf{f}\,\Delta V = 0$$

Dividiendo todos los términos de esta ecuación por ΔA, tomando límites cuando ΔA tiende a cero y observando que

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta A} = 0$$

se obtiene

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) + \mathbf{T}(\mathbf{r},-\mathbf{i})\cos\alpha + \mathbf{T}(\mathbf{r},-\mathbf{j})\cos\beta + \mathbf{T}(\mathbf{r},-\mathbf{k})\cos\gamma = 0 \qquad (1.12)$$

Esta ecuación es válida para cualquier plano de normal **n**. En particular, si tomamos el plano de normal $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, entonces $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$ y la Ec. (1.12) se reduce a

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{i}) = -\,\mathbf{T}(\mathbf{r},-\mathbf{i})$$

Expresiones similares pueden obtenerse para $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ y $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. En general, se cumple que

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = -\,\mathbf{T}(\mathbf{r},-\mathbf{n}) \qquad (1.13)$$

Esta ecuación es consecuencia del *Principio de Acción y Reacción* (Tercera ley de Newton) y establece que los dos vectores esfuerzo que actúan sobre ambas caras de un mismo plano tienen la misma magnitud pero sentidos opuestos.

Sustituyendo la Ec. (1.13), para $\mathbf{n} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, en la Ec. (1.12) se obtiene que

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{i})\cos\alpha + \mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{j})\cos\beta + \mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{k})\cos\gamma \qquad (1.14)$$

Escribiendo los vectores esfuerzo en términos de sus componentes cartesianas, de acuerdo con la Ec. (1.7), se tiene

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \begin{bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\end{bmatrix}\cos\alpha + \begin{bmatrix}\tau_{yx}\\ \sigma_y\\ \tau_{yz}\end{bmatrix}\cos\beta + \begin{bmatrix}\tau_{zx}\\ \tau_{zy}\\ \sigma_z\end{bmatrix}\cos\gamma$$

Es decir

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \begin{bmatrix}\sigma_x\cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma\\ \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma\\ \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma\end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^T \cdot \mathbf{n}$$

Como σ es una matriz simétrica, entonces $\sigma^T = \sigma$. Luego $\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n}$, tal como se quería demostrar. ∎

A la Ec. (1.11) se le da con frecuencia el nombre de *fórmula de Cauchy*. Dado que la matriz de esfuerzos solo depende de **r**, esto es, $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r})$, la fórmula de Cauchy permite determinar el vector esfuerzo **T** en un punto dado del sólido para cada normal **n** siempre que se conozca la matriz de esfuerzos σ en ese punto.

En términos de sus componentes cartesianas, y aprovechando la simetría de la matriz de esfuerzos, el vector esfuerzo puede escribirse como

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\beta + \tau_{xz} \cos\gamma \\ T_y &= \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{yz} \cos\gamma \\ T_z &= \tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma \end{aligned} \tag{1.15}$$

que es una versión expandida de la Ec. (1.11).

El módulo del vector esfuerzo viene dado por

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} \tag{1.16}$$

y forma ángulos α', β' y γ' con los ejes x, y y z, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} \alpha' &= \arccos(T_x / T) \\ \beta' &= \arccos(T_y / T) \\ \gamma' &= \arccos(T_z / T) \end{aligned} \tag{1.17}$$

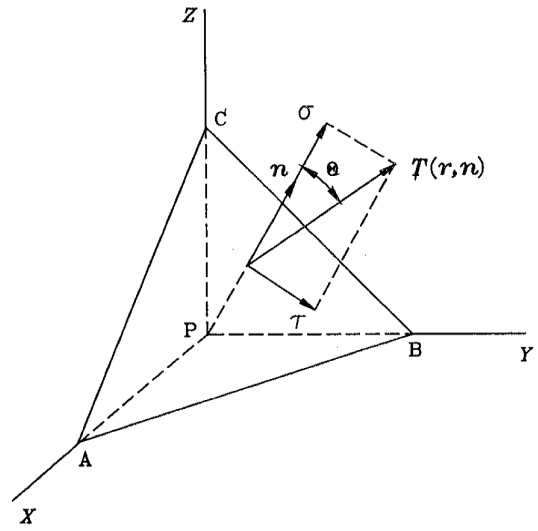


Figura 1.12 Componentes normal y tangencial del vector esfuerzo

Utilizando la Ec. (1.2), la componente normal del vector esfuerzo (ver Fig. 1.12) viene dada por

$$\sigma = T_x \cos\alpha + T_y \cos\beta + T_z \cos\gamma \tag{1.18}$$

Usando las ecuaciones (1.15) se obtiene finalmente la expresión

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + \\ + 2(\tau_{xy} \cos\alpha \cos\beta + \tau_{xz} \cos\alpha \cos\gamma + \tau_{yz} \cos\beta \cos\gamma) \end{aligned} \tag{1.19}$$

La componente tangencial τ viene dada por

$$\tau = \sqrt{T^2 - \sigma^2} \tag{1.20}$$

El ángulo entre la normal y el vector esfuerzo es

$$\theta = \operatorname{arctg}(\tau / \sigma) \tag{1.21}$$

Ejemplo 1.1

En la Fig. 1.13 se muestran los vectores esfuerzo que actúan sobre los planos con normales positivas de un elemento de volumen tomado alrededor de un punto de un sólido sometido a un sistema de cargas. Sabiendo que $|\mathbf{T(r, i)}|$ = 70 MPa y $|\mathbf{T(r, k)}|$ = 30 MPa, determine la matriz de esfuerzos en el punto considerado.

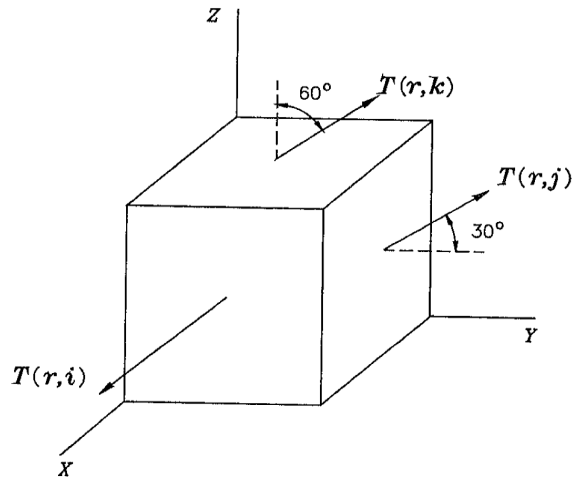


Figura 1.13 Elemento de volumen y vectores esfuerzo del Ejemplo 1.1

Solución: En la Fig. 1.13 se observa que el vector **T(r, i)** es paralelo al eje *x*; luego

$$\sigma_x = 70 \text{ MPa}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

Además, como **T(r, k)** está contenido en un plano paralelo al plano *yz*, se tiene que

$$\sigma_z = |\mathbf{T(r,k)}| \cos 60° = 15 \text{ MPa}$$
$$\tau_{zy} = |\mathbf{T(r,k)}| \operatorname{sen} 60° = 15\sqrt{3} \text{ MPa}$$
$$\tau_{zx} = 0$$

Por otra parte,

$$\tau_{yz} = |\mathbf{T(r, j)}| \operatorname{sen} 30° = |\mathbf{T(r,j)}| / 2$$

Dado que la matriz de esfuerzos es simétrica, entonces

$$\tau_{yz} = |\mathbf{T(r,j)}| / 2 = \tau_{zy} = 15\sqrt{3} \text{ MPa}$$

De donde se concluye que

$$|\mathbf{T(r,j)}| = 30\sqrt{3} \text{ MPa}$$

Entonces

$$\sigma_y = |\mathbf{T(r,j)}| \cos 30° = 45 \text{ MPa}$$

Luego la matriz de esfuerzos es

$$\sigma = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 15\sqrt{3} \\ 0 & 15\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Ejemplo 1.2

El estado de esfuerzos en un punto de un elemento de máquina está definido de la manera siguiente

$$\sigma_x = 4 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_y = 3 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_z = -5 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{xy} = -2 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Calcular el vector esfuerzo, así como sus componentes normal y tangencial, en un plano cuya normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados.

Solución: Como el vector normal es unitario, se sabe que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Ejemplo 1.1

En la Fig. 1.13 se muestran los vectores esfuerzo que actúan sobre los planos con normales positivas de un elemento de volumen tomado alrededor de un punto de un sólido sometido a un sistema de cargas. Sabiendo que $|\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{i})|$ = 70 MPa y $|\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{k})|$ = 30 MPa, determine la matriz de esfuerzos en el punto considerado.

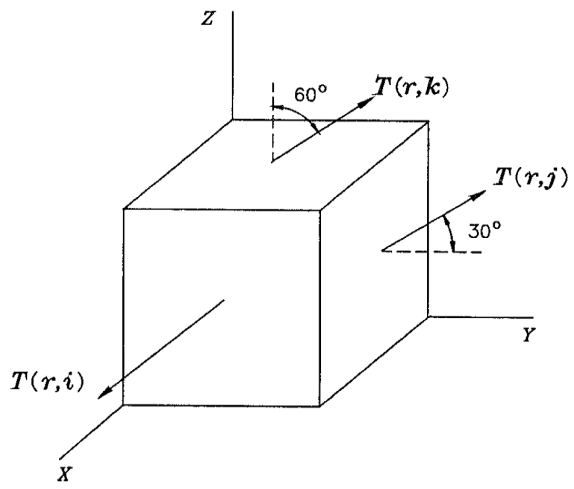


Figura 1.13 Elemento de volumen y vectores esfuerzo del Ejemplo 1.1

Solución: En la Fig. 1.13 se observa que el vector $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{i})$ es paralelo al eje x; luego

$$\sigma_x = 70 \text{ MPa}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

Además, como $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ está contenido en un plano paralelo al plano yz, se tiene que

$$\sigma_z = |\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{k})| \cos 60° = 15 \text{ MPa}$$
$$\tau_{zy} = |\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{k})| \operatorname{sen} 60° = 15\sqrt{3} \text{ MPa}$$
$$\tau_{zx} = 0$$

Por otra parte,

$$\tau_{yz} = |\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{j})| \operatorname{sen} 30° = |\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{j})| / 2$$

Dado que la matriz de esfuerzos es simétrica, entonces

$$\tau_{yz} = |\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{j})| / 2 = \tau_{zy} = 15\sqrt{3} \text{ MPa}$$

De donde se concluye que

$$|\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{j})| = 30\sqrt{3} \text{ MPa}$$

Entonces

$$\sigma_y = |\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{j})| \cos 30° = 45 \text{ MPa}$$

Luego la matriz de esfuerzos es

$$\sigma = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 15\sqrt{3} \\ 0 & 15\sqrt{3} & 15 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Ejemplo 1.2

El estado de esfuerzos en un punto de un elemento de máquina está definido de la manera siguiente

$$\sigma_x = 4 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_y = 3 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_z = -5 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{xy} = -2 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Calcular el vector esfuerzo, así como sus componentes normal y tangencial, en un plano cuya normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados.

Solución: Como el vector normal es unitario, se sabe que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

En este ejemplo, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$. Luego

$$3\cos^2\alpha = 1$$
$$\cos\alpha = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 54.7°$$

Entonces, de acuerdo con la Ec. (1.11), tenemos

$$\mathbf{T(r,n)} = \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -5/\sqrt{3} \end{bmatrix} \text{kgf/mm}^2$$

Luego

$$|\mathbf{T(r,n)}| = \sqrt{(2/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2 + (-5/\sqrt{3})^2} = \sqrt{10} = 3.16 \text{ kgf/mm}^2$$

La componente normal viene dada por la Ec. (1.18). Dado que α=β=γ, entonces

$$\sigma = (T_x + T_y + T_z)\cos\alpha$$
$$= (2/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} - 5/\sqrt{3})\ (1/\sqrt{3}) = -2/3 = -0.67 \text{ kgf/mm}^2$$

El esfuerzo tangencial vale

$$\tau = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (-2/3)^2} = 3.09 \text{ kgf/mm}^2$$

1.6 Transformación de Coordenadas

Hemos visto que la matriz de esfuerzos es función de la posición. Es decir, en cada punto de un sólido existe una matriz de esfuerzos que caracteriza el estado de solicitaciones en ese punto. Una vez que se conoce esta matriz en un punto específico, el vector esfuerzo, así como sus componentes normal y tangencial, pueden determinarse por medio de las ecuaciones (1.11), (1.19) y (1.20). Sin embargo, al igual que las componentes de un vector, las componentes de la matriz de esfuerzos en un punto determinado del sólido dependen de la orientación del sistema de coordenadas. Supongamos entonces que σ es la matriz de esfuerzos en un punto de un sólido referida al sistema de coordenadas *xyz*. Sea *x'y'z'* otro sistema de coordenadas con el mismo origen pero con una orientación distinta (Fig. 1.14). Sean **i'**, **j'** y **k'** los vectores unitarios en las direcciones de los ejes *x'*, *y'* y *z'*, respectivamente. En el sistema de coordenadas *xyz*, estos vectores pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{i'} &= a_{xx}\mathbf{i} + a_{xy}\mathbf{j} + a_{xz}\mathbf{k} \\ \mathbf{j'} &= a_{yx}\mathbf{i} + a_{yy}\mathbf{j} + a_{yz}\mathbf{k} \\ \mathbf{k'} &= a_{zx}\mathbf{i} + a_{zy}\mathbf{j} + a_{zz}\mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.22a}$$

O bien

$$\mathbf{i'} = \begin{bmatrix} a_{xx} \\ a_{xy} \\ a_{xz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j'} = \begin{bmatrix} a_{yx} \\ a_{yy} \\ a_{yz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k'} = \begin{bmatrix} a_{zx} \\ a_{zy} \\ a_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.22b}$$

donde $a_{xx} = \cos(x', x)$ es el coseno director del ángulo entre el eje x' y el eje x, $a_{xy} = \cos(x', y)$ el coseno director del ángulo entre el eje x' y el eje y, etc.

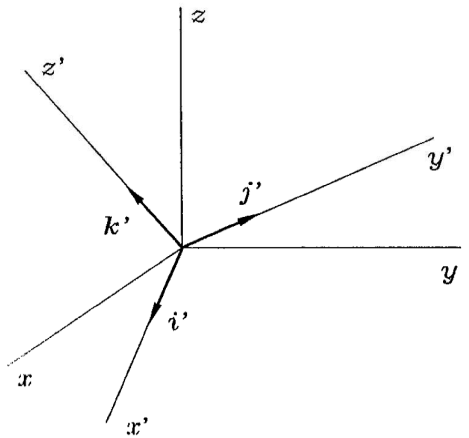


Figura 1.14 Transformación de coordenadas

Estos cosenos directores suelen agruparse en forma matricial como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

A esta matriz se le da el nombre de *matriz de transformación*. Dado que el sistema de coordenadas es ortonormal, los cosenos directores satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{xx}^2 + a_{xy}^2 + a_{xz}^2 &= 1 \\ a_{yx}^2 + a_{yy}^2 + a_{yz}^2 &= 1 \\ a_{zx}^2 + a_{zy}^2 + a_{zz}^2 &= 1 \\ a_{xx}a_{yx} + a_{xy}a_{yy} + a_{xz}a_{yz} &= 0 \\ a_{xx}a_{zx} + a_{xy}a_{zy} + a_{xz}a_{zz} &= 0 \\ a_{yx}a_{zx} + a_{yy}a_{zy} + a_{yz}a_{zz} &= 0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Nos proponemos entonces investigar como varían las componentes de la matriz de esfuerzos mediante una rotación del sistema de coordenadas. Los vectores esfuerzo en los planos ortogonales a los ejes x', y' y z' serán, de acuerdo con la Ec. (1.11),

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{i}') = \sigma \cdot \mathbf{i}'$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{j}') = \sigma \cdot \mathbf{j}'$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{k}') = \sigma \cdot \mathbf{k}'$$

Como se hizo en la sección precedente, cada uno de estos vectores puede descomponerse en un esfuerzo normal y en dos tangenciales al plano correspondiente. Aprovechando la simetría de la matriz de esfuerzos y haciendo uso de la propiedad $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}^T$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos matrices cualesquiera, se obtiene

$$\sigma_{x'} = [\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{i}')]^T \cdot \mathbf{i}' = [\mathbf{i}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{i}'$$

$$\tau_{x'y'} = [\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{i}')]^T \cdot \mathbf{j}' = [\mathbf{i}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{j}'$$

.....

$$\tau_{y'z'} = [\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{j}')]^T \cdot \mathbf{k}' = [\mathbf{j}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{k}'$$

.....

Entonces, la matriz de esfuerzos σ' en el sistema de coordenadas $x'y'z'$ viene dada por

$$\sigma' = \begin{bmatrix} [\mathbf{i}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{i}' & [\mathbf{i}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{j}' & [\mathbf{i}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{k}' \\ [\mathbf{j}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{i}' & [\mathbf{j}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{j}' & [\mathbf{j}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{k}' \\ [\mathbf{k}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{i}' & [\mathbf{k}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{j}' & [\mathbf{k}']^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{k}' \end{bmatrix}$$

Efectuando los productos indicados en cada término de esta matriz, puede comprobarse que

$$\sigma' = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{bmatrix}$$

Esto es

$$\sigma' = \mathbf{A} \cdot \sigma \cdot \mathbf{A}^T \tag{1.25}$$

La ecuación de transformación (1.25) caracteriza a la matriz de esfuerzos como un *tensor* de segundo orden[11]. En efecto, un tensor de segundo orden se define como un conjunto de nueve números tales que, mediante una rotación A del sistema de coordenadas, se transforma de acuerdo con (1.25).

[11] Para más detalles sobre este tema puede consultarse, por ejemplo, el libro de L. Santaló

Ejemplo 1.3

Determine la matriz de esfuerzos del ejemplo 1.1 en el sistema de coordenadas *x'y'z'* mostrado en la Fig. 1.15.

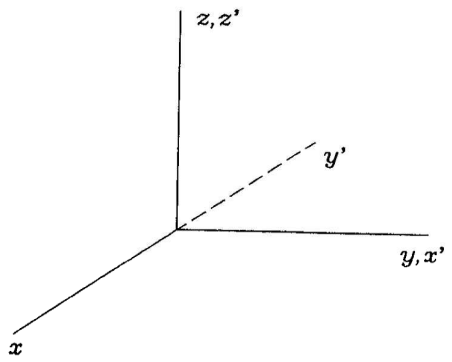


Figura 1.15 Transformación de coordenadas del ejemplo 1.3

Solución: Expresando los vectores unitarios **i'**, **j'** y **k'** en el sistema de coordenadas *xyz* se tiene que

$$\mathbf{i}'=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{j}'=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{k}'=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

La matriz de transformación será entonces

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

La matriz de esfuerzos σ' en el sistema *x'y'z'* vendrá dada por

$$\sigma=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70 & 0 & 0\\ 0 & 45 & 15\sqrt{3}\\ 0 & 15\sqrt{3} & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\text{ MPa}$$

Es decir

$$\sigma=\begin{bmatrix}45 & 0 & 15\sqrt{3}\\ 0 & 70 & 0\\ 15\sqrt{3} & 0 & 15\end{bmatrix}\text{ MPa}$$

Tratándose en este caso de una transformación de coordenadas tan sencilla, este resultado puede también obtenerse por simple inspección a partir de la definición de las componentes de la matriz de esfuerzos. Se recomienda al lector realizar este ejercicio.

1.7 Esfuerzos Principales

Hasta el momento se ha establecido que el estado de esfuerzos en un punto de un sólido está definido por los esfuerzos normales y tangenciales que actúan en tres planos mutuamente perpendiculares que pasen por el punto en consideración; es decir, por la matriz de esfuerzos en dicho punto. Dado que esta matriz es simétrica, se requiere conocer únicamente seis componentes: tres esfuerzos normales y tres tangenciales. Conocidos estos seis esfuerzos, se ha demostrado que el vector esfuerzo, así como sus componentes normal y tangencial, puede determinarse en cualquier plano que pase por dicho punto.

Supongamos entonces que para un sólido sometido a un sistema de cargas se ha determinado ya la matriz de esfuerzos σ en función de la posición ***r***. El problema que usualmente confrontamos a continuación es el de determinar si el sólido resistirá sin fallar el sistema de cargas al que está sometido. Normalmente este objetivo se logra mediante la aplicación de las llamadas *hipótesis de resistencia* o *teorías de falla* en los puntos más críticos del sólido.

Una de estas teorías, llamada *teoría de Rankine*, se utiliza fundamentalmente para predecir las fallas de naturaleza *frágil* y se basa en la comparación de los valores máximo y mínimo de la componente normal del vector esfuerzo con ciertos valores experimentales de referencia. Dado que los materiales que presentan este tipo de falla poseen generalmente diferente resistencia mecánica a los esfuerzos de tracción que a los de compresión, es de suma importancia considerar el signo de los esfuerzos normales en el cálculo de los valores máximo y mínimo.

De una manera similar, la llamada *teoría de Tresca* se utiliza para predecir las fallas de naturaleza *dúctil* y se basa en la comparación del valor máximo de la componente tangencial del vector esfuerzo con otro valor límite experimental. En este caso, no obstante, nos preocuparemos únicamente por el cálculo del valor máximo absoluto de la componente tangencial debido a que, en general, la resistencia al corte no depende del sentido de la aplicación del esfuerzo tangencial.

Existen algunas otras teorías de falla que utilizan parámetros de comparación diferentes. Sin embargo, la mayoría de ellas -tal como se estudiará en el Cap. 4- basan su formulación en el conocimiento de los valores extremos del esfuerzo normal.

Con este objetivo en mente, fijaremos de nuevo el vector de posición **r** y nos dedicaremos en primer lugar a estudiar la variación de la componente normal del vector esfuerzo en función de la normal **n**. Para determinar los valores máximo y mínimo del esfuerzo normal, se podría utilizar la Ec. (1.19) y visualizar la componente normal σ del vector esfuerzo como una función escalar de tres variables $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, sujetas a la restricción $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. A partir de este planteamiento, se podría utilizar, por ejemplo, el método de los *multiplicadores de Lagrange*[12] y determinar los valores extremos de σ. Sin embargo, aquí se procederá de una manera indirecta, más intuitiva, para la evaluación de los valores máximo y mínimo del esfuerzo normal.

Como se dijo al principio del capítulo, el vector esfuerzo $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ no es, en general, paralelo a la normal **n**. Sin embargo, cabe la posibilidad de que exista algún plano donde el vector esfuerzo tenga la dirección de la normal. Efectivamente es este el caso y, tal como se demostrará posteriormente, en cada punto ***r*** de un sólido existen *por lo menos* tres planos donde esta situación ocurre. A estos planos se les da el nombre de *planos principales* y los esfuerzos normales que actúan sobre ellos se denominan *esfuerzos principales*.

Entonces, en un plano principal la componente tangencial es nula y el módulo del vector esfuerzo **T** coincide con el valor de la componente normal σ. Por lo tanto, en un plano principal se cumple que el vector es fuerzo es paralelo al vector normal **n**. Esto es

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \lambda \mathbf{n} \\ \tau = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

[12]Para revisar este método el lector puede consultar, por ejemplo, el libro de E. Purcell y D. Varberg, *"Cálculo con Geometría Analítica"*, 4ª Ed., Prentice-Hall, México, 1989, pp. 675-679.

donde λ es un escalar que, obviamente, coincide con el valor de la componente normal σ del vector esfuerzo.

Utilizando la Ec. (1.11) se tiene

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} = \lambda \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$$

donde **I** es la matriz identidad. Entonces

$$(\sigma - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{1.27a}$$

Esto es

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.27b}$$

O bien

$$\begin{cases} (\sigma_x - \lambda)\cos\alpha + \tau_{xy}\cos\beta + \tau_{xz}\cos\gamma = 0 \\ \tau_{xy}\cos\alpha + (\sigma_y - \lambda)\cos\beta + \tau_{yz}\cos\gamma = 0 \\ \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + (\sigma_z - \lambda)\cos\gamma = 0 \end{cases} \tag{1.27c}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas en las tres incógnitas $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$. Para que tenga solución distinta de la trivial (distinta de cero), al menos una de las tres ecuaciones debe ser combinación lineal de las otras dos. Es decir, el determinante del sistema debe ser nulo:

$$\det(\sigma - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.28}$$

Desarrollando este determinante obtenemos una ecuación de tercer grado en λ

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{1.29}$$

donde los coeficientes I_1, I_2 e I_3 vienen dados por

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \qquad (1.30)$$
$$I_3 = \det(\sigma)$$

Estos tres coeficientes se denominan *invariantes de la matriz de esfuerzos* porque no dependen de la orientación del sistema de coordenadas elegido. Es decir, si escogemos otro sistema de coordenadas $x'y'z'$, con el mismo origen pero con una orientación distinta (Fig. 1.14) definida por una matriz de transformación **A**, y calculamos la nueva matriz de esfuerzos σ' en este sistema mediante la Ec. (1.25)

$$\sigma' = \mathbf{A}\cdot\sigma\cdot\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix}$$

puede demostrarse que $I'_1 = I_1$, $I'_2 = I_2$ e $I'_3 = I_3$, donde I'_1, I'_2 e I'_3 son los nuevos coeficientes de la Ec. (1.29) calculados en base al sistema de coordenadas $x'y'z'$. Esto comprueba que la Ec. (1.29) es siempre la misma sin importar cual sea el sistema particular de coordenadas elegido. Por esta razón, a la Ec. (1.29) se le da el nombre de *ecuación característica* del estado de esfuerzos.

Puede demostrarse que las tres soluciones de la ecuación característica (1.29) son siempre números reales. En efecto, supongamos que (1.29) tiene una raíz compleja $\lambda = \rho + i\psi$, donde ρ y ψ son números reales e $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Entonces, como $\sigma\cdot\mathbf{n} = \lambda\,\mathbf{n}$, la única forma de que esta ecuación se cumpla es que el vector $\boldsymbol{n}$ sea complejo. Sea $\mathbf{n} = \mathbf{p} + i\,\mathbf{q}$, donde $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son vectores-columna reales. Entonces

$$\sigma\cdot(\mathbf{p} + i\mathbf{q}) = (\rho + i\psi)(\mathbf{p} + i\mathbf{q})$$
$$\sigma\cdot\mathbf{p} + i\sigma\cdot\mathbf{q} = (\rho\mathbf{p} - \psi\mathbf{q}) + i(\rho\mathbf{q} + \psi\mathbf{p})$$

Comparando partes reales e imaginarias se tiene

$$\sigma\cdot\mathbf{p} = \rho\mathbf{p} - \psi\mathbf{q} \qquad (a)$$
$$\sigma\cdot\mathbf{q} = \rho\mathbf{q} + \psi\mathbf{p} \qquad (b)$$

Multiplicando la Ec. (a) por $\mathbf{q}^T$ y la Ec. (b) por $\mathbf{p}^T$ se obtiene

$$\mathbf{q}^T\cdot\sigma\cdot\mathbf{p} = \rho\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{p} - \psi\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{q} \qquad (c)$$
$$\mathbf{p}^T\cdot\sigma\cdot\mathbf{q} = \rho\mathbf{p}^T\cdot\mathbf{q} + \psi\mathbf{p}^T\cdot\mathbf{p} \qquad (d)$$

Trasponiendo ambos miembros de la Ec. (c) y teniendo presente la simetría de la matriz de esfuerzos, se tiene

$$\mathbf{p}^T\cdot\sigma\cdot\mathbf{q} = \rho\mathbf{p}^T\cdot\mathbf{q} - \psi\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{q} \qquad (e)$$

Comparando (d) y (e) se concluye que

$$\psi(\mathbf{p}^T\cdot\mathbf{p} + \mathbf{q}^T\cdot\mathbf{q}) = 0$$

Esto es

$$\psi(p^2 + q^2) = 0$$

Como se están buscando soluciones no triviales para el vector $\mathbf{n}$, entonces $p^2 + q^2 \neq 0$. Luego $\psi = 0$ y las soluciones de (1.29) tienen que ser reales.

Las tres soluciones de la ecuación característica, que son precisamente los esfuerzos principales en el punto considerado, se designan con σ_1, σ_2 y σ_3, en el entendido de que

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \qquad (1.31)$$

Para determinar las tres *direcciones principales* $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ y $\mathbf{n}_3$ se procede de la siguiente manera. Hacemos, por ejemplo, $\lambda = \sigma_1$ en el sistema (1.27c), eliminamos la ecuación que resulte linealmente dependiente, la sustituimos por la ecuación de los cosenos directores

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$

y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante. De una manera similar puede procederse para la determinación de $\mathbf{n}_2$ y $\mathbf{n}_3$. Sin embargo, debido a las

propiedades de los esfuerzos principales que se estudiarán enseguida, generalmente al calcular una de las direcciones principales, las dos restantes pueden determinarse por simple inspección[13].

Propiedades de los esfuerzos principales

a) Los tres esfuerzos principales son mutuamente perpendiculares.

En efecto, sean μ y ν dos esfuerzos principales distintos y sean $\mathbf{m}$ y $\mathbf{n}$ las direcciones principales correspondientes. Por hipótesis

$$\sigma \cdot \mathbf{m} = \mu \mathbf{m} \tag{f}$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \nu \mathbf{n} \tag{g}$$

Multiplicando la Ec. (f) por $\mathbf{n}^T$ y la Ec. (g) por $\mathbf{m}^T$ se tiene

$$\mathbf{n}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{m} = \mu \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{m} \tag{h}$$

$$\mathbf{m}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} = \nu \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{n} \tag{i}$$

Trasponiendo los dos miembros de la Ec. (h) y teniendo presente la simetría de la matriz de esfuerzos, se obtiene

$$\mathbf{m}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} = \mu \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{n} \tag{j}$$

Restando (j) menos (i) se tiene que

$$(\mu - \nu)\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{n} = 0$$

Como por hipótesis $\mu \neq \nu$, entonces $\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{n} = 0$ y, por lo tanto, los vectores $\mathbf{m}$ y $\mathbf{n}$ son ortogonales[14].

[13]El problema de la determinación los esfuerzos y las direcciones principales se estudia en Matemáticas de una manera general para una matriz cualquiera. A los esfuerzos principales se les da el nombre de *autovalores* de la matriz, mientras que las direcciones principales reciben el nombre de *autovectores*.

[14] Si dos o más esfuerzos principales son iguales, es posible demostrar que las direcciones principales correspondientes también son ortogonales, pero la demostración en este caso es mucho más complicada.

En la Fig. 1.16 se muestra una representación de los tres ejes principales, los cuales definen un sistema ortonormal de coordenadas en la base $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$. Es importante señalar que al determinar las direcciones principales mediante el procedimiento descrito anteriormente, se obtienen en realidad dos soluciones para cada vector $\mathbf{n}_i$, las cuales nos proporcionan una misma dirección pero dos sentidos opuestos. De estos tres pares de soluciones se escogen aquellas que nos conducen a un sistema principal de coordenadas dextrógiro, es decir, que cumplen con

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3, \qquad \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1, \qquad \mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \tag{1.32}$$

b) Los esfuerzos principales son los valores extremos de la componente normal del vector esfuerzo

En su forma expandida, la componente normal del vector esfuerzo viene dada por la Ec. (1.19)

$$\sigma \quad \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cos^2\beta + \sigma_z \cos^2\gamma + 2(\tau_{xy} \cos\alpha\cos\beta + \tau_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + \tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma) \tag{1.19}$$

Esta ecuación nos proporciona de una manera explícita el valor del esfuerzo normal en un punto en términos de las seis componentes de la matriz de esfuerzos y de la normal $\mathbf{n}$. Tal como se dijo antes, el esfuerzo normal puede en este contexto visualizarse como una función de tres variables cos α, cos β y con γ, ligadas por la restricción

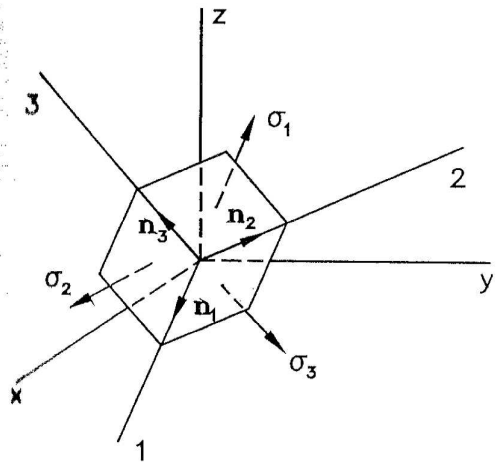


Figura 1.16 Esfuerzos y ejes principales

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1.33}$$

Podemos aplicar entonces el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de la función (1.19). Sea H la función definida por

$$H(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \sigma\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) - \lambda(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Tomando las derivadas parciales de la función H con respecto a cada uno de sus argumentos e igualando a cero cada una de las derivadas parciales, se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial(\cos\alpha)} = 2\sigma_x\cos\alpha + 2\tau_{xy}\cos\beta + 2\tau_{xz}\cos\gamma - 2\lambda\cos\alpha = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial(\cos\beta)} = 2\sigma_y\cos\beta + 2\tau_{xy}\cos\alpha + 2\tau_{yz}\cos\gamma - 2\lambda\cos\beta = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial(\cos\gamma)} = 2\sigma_z\cos\gamma + 2\tau_{xz}\cos\alpha + 2\tau_{yz}\cos\beta - 2\lambda\cos\gamma = 0$$

Este sistema de ecuaciones, después de simplificarlo y agrupar algunos términos, es idéntico al (1.27c), donde el multiplicador de Langrange λ juega el papel del esfuerzo normal. Esto significa que la evaluación de los valores extremos de la componente normal del vector esfuerzo conduce al mismo resultado que la evaluación de los esfuerzos principales, con lo cual se ha demostrado que los esfuerzos principales son los valores extremos del esfuerzo normal y que, además, en los planos donde actúan estos valores extremos el esfuerzo tangencial es nulo.

Ejemplo 1.4

El estado de esfuerzos en un punto está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 80 & 50 & 0 \\ 50 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

a) Representar en un cubo elemental este estado de esfuerzos
b) Calcular los esfuerzos principales
c) Determinar las direcciones principales y representarlas gráficamente.

Solución: a) La representación gráfica de este estado de esfuerzos, según la convención de signos establecida en la Sec. 1.5, se muestra en la Fig. 1.17 en un elemento infinitesimal de aristas *dx*. *dy* y *dz*. En este elemento se muestran únicamente los esfuerzos sobre los planos positivos. Se deja como ejercicio para el lector la representación gráfica de los esfuerzos en los planos negativos.

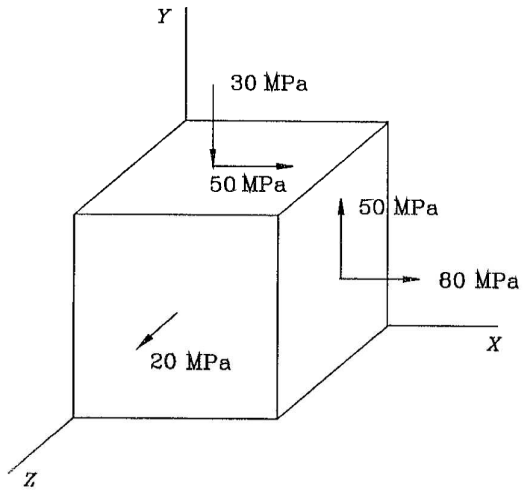


Figura 1.17 Estado de esfuerzos del ejemplo 1.4

b) En este ejemplo el determinante (1.28) es

$$\begin{vmatrix} 80-\lambda & 50 & 0 \\ 50 & -(30+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 20-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando se tiene

$$(20-\lambda)\left[(80-\lambda)(30+\lambda) + 2500\right] = 0$$

Esto es

$$(20-\lambda)(4900 + 50\lambda - \lambda^2) = 0$$

Las raíces de esta ecuación, es decir, los esfuerzos principales, son

$$\sigma_1 = -49.3 \text{ MPa}$$
$$\sigma_2 = 20.0 \text{ MPa}$$
$$\sigma_3 = 99.3 \text{ MPa}$$

c) Para determinar las direcciones principales se tiene que resolver, para cada esfuerzo principal, el sistema de ecuaciones (1.27c). En nuestro ejemplo el sistema es

$$\begin{cases} (80-\lambda)\cos\alpha + 50\cos\beta = 0 \\ 50\cos\alpha - (30+\lambda)\cos\beta = 0 \\ (20-\lambda)\cos\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{(a)}$$

Dirección principal 1: Se sustituye $\lambda = \sigma_1 = -49.3$ MPa en el sistema (a) para obtener

$$\begin{cases} 129.3\cos\alpha_1 + 50\cos\beta_1 = 0 \\ 50\cos\alpha_1 + 19.3\cos\beta_1 = 0 \\ \cos\gamma_1 = 0 \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones son linealmente dependientes. Eliminamos entonces la segunda y nos queda, junto con la Ec. (1.33), el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 129.3\cos\alpha_1 + 50\cos\beta_1 = 0 \\ \cos\gamma_1 = 0 \\ \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \end{cases}$$

Las dos soluciones de este sistema son $\alpha_1 = 68.9°$, $\beta_1 = 158.9°$, $\gamma_1 = 90°$ y $\alpha_1 = 111.1°$, $\beta_1 = 21.1°$, $\gamma_1 = 90°$.

Dirección principal 2: Se sustituye $\lambda = \sigma_2 = 20.0$ MPa en el sistema (a) para obtener

$$\begin{cases} 60\cos\alpha_2 + 50\cos\beta_2 = 0 \\ 50\cos\alpha_2 - 50\cos\beta_2 = 0 \\ 0\cdot\cos\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes; luego, para $\cos\alpha_2$ y $\cos\beta_2$ la única solución posible es la trivial $\cos\alpha_2 = \cos\beta_2 = 0$, lo que implica que $\alpha_2 = \beta_2 = 90°$. De la tercera ecuación se concluye que γ_2 es arbitrario; sin embargo, usando la Ec. (1.33) se obtiene que $\gamma_2 = 0°$ o $\gamma_2 = 180°$.

Dirección principal 3: Se sustituye $\lambda = \sigma_3 = 99.3$ MPa en el sistema (a) para obtener

$$\begin{cases} -19.3\cos\alpha_3 + 50\cos\beta_3 = 0 \\ 50\cos\alpha_3 - 129.3\cos\beta_3 = 0 \\ \cos\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones son linealmente dependientes. Eliminamos entonces la segunda y nos queda, junto con la Ec. (1.33), el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -19.3\cos\alpha_3 + 50\cos\beta_3 = 0 \\ \cos\gamma_3 = 0 \\ \cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1 \end{cases}$$

Las dos soluciones de este sistema son $\alpha_3 = 21.1°$, $\beta_3 = 68.9°$, $\gamma_3 = 90°$ y $\alpha_3 = 158.9°$, $\beta_3 = 111.1°$, $\gamma_3 = 90°$.

Conclusión: Los pares de soluciones obtenidos para cada una de las direcciones principales nos dan la misma dirección para cada eje pero sentidos opuestos. Cualquiera sea la solución final que se adopte, el sistema principal debe ser dextrógiro. Como ejemplo, se ha seleccionado la siguiente combinación

$$\alpha_1 = 111.1°, \quad \beta_1 = 21.1°, \quad \gamma_1 = 90°$$
$$\alpha_2 = 90°, \quad \beta_2 = 90°, \quad \gamma_2 = 0°$$
$$\alpha_3 = 21.1°, \quad \beta_3 = 68.9°, \quad \gamma_3 = 90°$$

La representación gráfica de estos resultados se muestran en la Fig. 1.18. Obsérvese que, sin necesidad de efectuar ningún cálculo, se sabía anticipadamente que el eje z era un eje principal puesto que los esfuerzos tangenciales en el plano perpendicular a ese eje son nulos. Aprovechando esta circunstancia, así como la propiedad de ortogonalidad de los ejes principales, el

cálculo de las direcciones principales 2 y 3 pudo haberse omitido. En efecto, sabiendo que el eje z coincide con el eje principal 2, necesariamente los ejes principales 1 y 3 tienen que estar contenidos en el plano xy. Entonces se determina únicamente una de estas dos direcciones (1 o 3) y la otra se obtiene por ortogonalidad. ∎

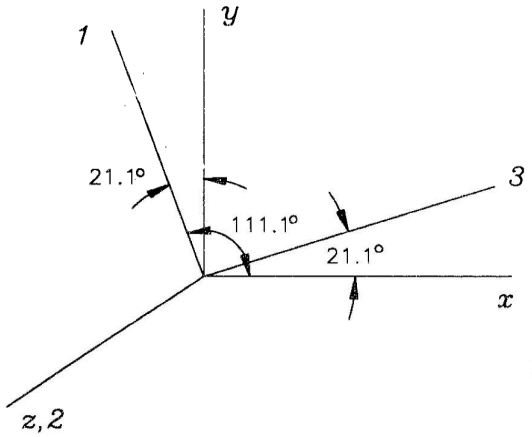


Figura 1.18 Direcciones principales del ejemplo 1.4

En algunos casos pueden resultar esfuerzos principales repetidos. Si los tres esfuerzos principales son idénticos, los ejes principales quedan definidos por tres vectores ortogonales cualesquiera. Por otra parte, si dos esfuerzos principales son idénticos y el tercero es diferente, es posible entonces determinar unívocamente la dirección principal asociada al esfuerzo principal que es diferente; para las dos direcciones principales restantes pueden tomarse dos ejes ortogonales cualesquiera contenidos en un plano perpendicular a la dirección principal ya determinada.

Ejemplo 1.5

Calcular los esfuerzos principales, en magnitud y dirección, para el estado de esfuerzos definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 70 & 0 & -20 \\ 0 & 30 & 0 \\ -20 & 0 & 40 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Solución: a) El determinante (1.28) es

$$\begin{vmatrix} 70-\lambda & 0 & -20 \\ 0 & 30-\lambda & 0 \\ -20 & 0 & 40-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando se obtiene la ecuación característica

$$(30-\lambda)(\lambda^2 - 110\lambda + 2400) = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\sigma_1 = 30 \text{ MPa}$$
$$\sigma_2 = 30 \text{ MPa}$$
$$\sigma_3 = 80 \text{ MPa}$$

b) La dirección principal 3 puede determinarse analíticamente como en el ejemplo anterior. Se tendría entonces

$$\alpha_3 = 26.6°, \qquad \beta_3 = 90°, \qquad \gamma_3 = 63.4°$$

Para las direcciones 1 y 2 podrían elegirse cualesquiera par de ejes ortogonales contenidos en un plano perpendicular a la dirección principal 3. Sin embargo, en este ejemplo se sabe que una de estas dos direcciones principales coincide con el eje y (¿por qué?). Entonces le asignamos al eje 1 la dirección del eje y y para la dirección 2 tomamos un eje perpendicular a las direcciones 1 y 3 (ver Fig. 1.19). Tenemos así que

$$\alpha_1 = 90°, \qquad \beta_1 = 0°, \qquad \gamma_1 = 90°$$
$$\alpha_2 = 116.6°, \qquad \beta_2 = 90°, \qquad \gamma_2 = 26.6°$$ ∎

A diferencia de los dos ejemplos anteriores, en algunos casos es posible que ninguna de las componentes de la matriz de esfuerzos sea nula. Cuando esta sea la situación, la ecuación característica que resulta puede no ser fácilmente factorizable y, para resolverla, deberá utilizarse algún método numérico, como el de *Newton-Raphson*[15], por ejemplo.

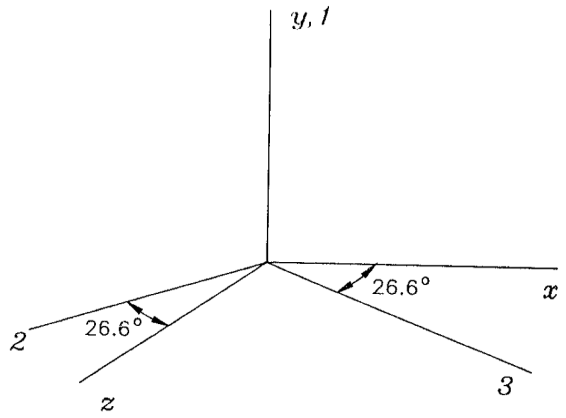


Figura 1.19 Direcciones principales del ejemplo 1.5

Sea $f(\lambda)$ la función definida por

$$f(\lambda) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3$$

Su primera derivada es

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2I_1 \lambda + I_2$$

Sea λ_n una raíz aproximada de la ecuación característica. Entonces, una mejor aproximación viene dada por

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)}$$

Esta es la llamada *fórmula de Newton-Raphson* para una ecuación del tipo $f(\lambda) = 0$. En nuestro caso particular tendríamos

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{\lambda_n^3 - I_1\lambda_n^2 + I_2\lambda_n - I_3}{3\lambda_n^2 - 2I_1\lambda_n + I_2}$$

Usualmente se parte de uno de los esfuerzos normales de la matriz de esfuerzos como una primera aproximación a uno de los esfuerzos principales. Luego se aplica reiteradamente la fórmula de Newton-Raphson hasta obtener

un valor estable. Posteriormente se factoriza la ecuación característica y se determinan los dos esfuerzos principales restantes resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta.

Ejemplo 1.6

Calcular la magnitud de los esfuerzos principales para el estado de esfuerzos definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 30 & -20 & 70 \\ -20 & -40 & 10 \\ 70 & 10 & 60 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Solución: La ecuación característica es

$$\lambda^3 - 50\lambda^2 - 7200\lambda - 69000 = 0$$

Comenzando el ciclo con el esfuerzo normal más pequeño $\lambda = -40$ MPa, se obtiene, después de 6 iteraciones, el valor $\lambda = -56.2$ MPa, que es uno de los esfuerzos principales. Factorizando la ecuación característica se tiene

$$(\lambda + 56.2)(\lambda^2 - 106.2\lambda - 1231.6) = 0$$

Después de resolver la ecuación de segundo grado, obtenemos finalmente los esfuerzos principales $\sigma_1 = -56.2$ MPa, $\sigma_2 = -10.5$ MPa y $\sigma_3 = 116.7$ MPa.

1.8 Círculos de Mohr

Supongamos que en un punto determinado de un sólido conocemos los tres esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3, en magnitud y dirección. Lo que nos proponemos ahora es determinar el vector esfuerzo, así como sus componentes normal y tangencial, en un plano que forma ángulos α, β y γ con los *ejes principales* $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ y $\mathbf{n}_3$ (Fig. 1.20).

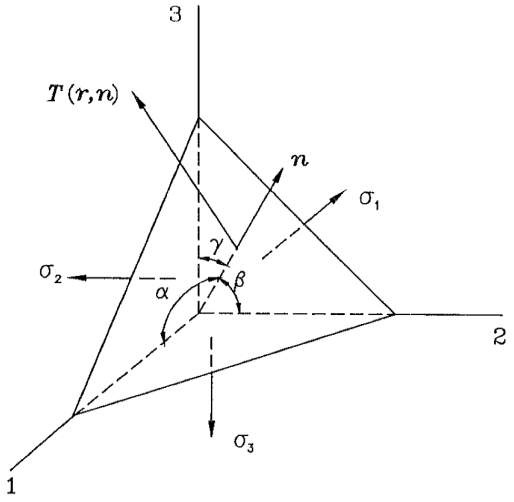


Figura 1.20 Tetraedro de Cauchy en el sistema principal de coordenadas

En el sistema principal de coordenadas, la matriz de esfuerzos se expresa como

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{1.34}$$

Aplicando la fórmula de Cauchy se tiene

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos\alpha \\ \sigma_2 \cos\beta \\ \sigma_3 \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Entonces

$$T^2 = \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma \tag{1.35}$$

Utilizando la Ec. (1.2), la componente normal del vector esfuerzo viene dada por

mientras que la componente tangencial es

$$\tau^2 = T^2 - \sigma^2 \tag{1.37}$$

Es decir, dados los esfuerzos principales en un punto, podemos calcular las componentes normal y tangencial σ y τ en un plano que forma ángulos α, β y γ con los ejes principales.

Formulemos ahora el problema inverso. Es decir, dados los esfuerzos principales y las componentes σ y τ, ¿Cuál es la orientación **n** del plano correspondiente?

Utilizando las Ecs. (1.33), (1.35), (1.36) y (1.37), formamos el sistema de tres ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma = \sigma \\ \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma = \sigma^2 + \tau^2 \end{cases} \tag{1.38}$$

en las incógnitas $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$ y $\cos^2\gamma$.

El determinante de este sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1) \tag{1.39}$$

Si $\sigma_i \neq \sigma_j$ para $i \neq j$, es decir, si no hay esfuerzos principales repetidos, entonces $\Delta \neq 0$ y el sistema (1.38) es compatible determinado[16]. Su solución, aplicando la regla de Cramer, viene dada por

$$\cos^2\alpha = \Delta_\alpha / \Delta, \qquad \cos^2\beta = \Delta_\beta / \Delta, \qquad \cos^2\gamma = \Delta_\gamma / \Delta \tag{1.40}$$

donde

[16] Si los tres esfuerzos principales son idénticos, entonces existen infinitas soluciones para los tres cosenos directores. Si hay dos esfuerzos principales repetidos, el ángulo que forma la normal con

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma^2+\tau^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} \tag{1.41a}$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma^2+\tau^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} \tag{1.41b}$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma^2+\tau^2 \end{vmatrix} \tag{1.41c}$$

Desarrollando (1.41a) tenemos

$$\Delta_\alpha = \sigma_2\sigma_3^2 + \sigma_3(\sigma^2+\tau^2) + \sigma_2^2\sigma - \sigma_2(\sigma^2+\tau^2) - \sigma_2^2\sigma_3 - \sigma\sigma_3^2$$

Esto es

$$\Delta_\alpha = \sigma_2\sigma_3(\sigma_3-\sigma_2) + (\sigma^2+\tau^2)(\sigma_3-\sigma_2) - \sigma(\sigma_3^2-\sigma_2^2)$$

$$= (\sigma_3-\sigma_2)\left[\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_3-\sigma_2}{2}\right)^2\right]$$

Suponiendo que $\sigma_2 \neq \sigma_3$, se tiene que

$$\cos^2\alpha = \frac{\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_3-\sigma_2}{2}\right)^2}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_1)} \tag{1.42a}$$

De una manera similar se obtienen las expresiones

$$\cos^2\beta = -\frac{\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_2-\sigma_1)} \tag{1.42b}$$

$$\cos^2\gamma = \frac{\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^2}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)} \tag{1.42c}$$

Esta es la solución al problema inverso planteado. Es decir, dados los esfuerzos principales y las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo, la orientación del plano correspondiente viene definida por las ecuaciones (1.42).

Ahora bien, como los cosenos directores del vector normal deben ser números reales, se tiene que cumplir

$$\cos^2\alpha \geq 0, \qquad \cos^2\beta \geq 0, \qquad \cos^2\gamma \geq 0$$

Esto significa que

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_3-\sigma_2}{2}\right)^2$$

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2 \tag{1.43}$$

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^2$$

Sea

$$c_1 = \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, \qquad c_2 = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, \qquad c_3 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} \tag{1.44}$$

$$r_1 = \frac{\sigma_3-\sigma_2}{2}, \qquad r_2 = \frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}, \qquad r_3 = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2} \tag{1.45}$$

Entonces las ecuaciones (1.42) pueden escribirse como

$$\cos^2\alpha = \frac{\tau^2 + (\sigma - c_1)^2 - r_1^2}{4r_2r_3}$$

$$\cos^2\beta = \frac{\tau^2 + (\sigma - c_2)^2 - r_2^2}{4r_1r_3} \qquad (1.46)$$

$$\cos^2\gamma = \frac{\tau^2 + (\sigma - c_3)^2 - r_3^2}{4r_1r_2}$$

Mientras que las expresiones (1.43) quedan como

$$\tau^2 + (\sigma - c_1)^2 \geq r_1^2$$

$$\tau^2 + (\sigma - c_2)^2 \leq r_2^2 \qquad (1.47)$$

$$\tau^2 + (\sigma - c_3)^2 \geq r_3^2$$

Este sistema de desigualdades puede representarse gráficamente en un plano $\{\sigma, \tau\}$ para obtener el diagrama mostrado en la Fig. 1.21.

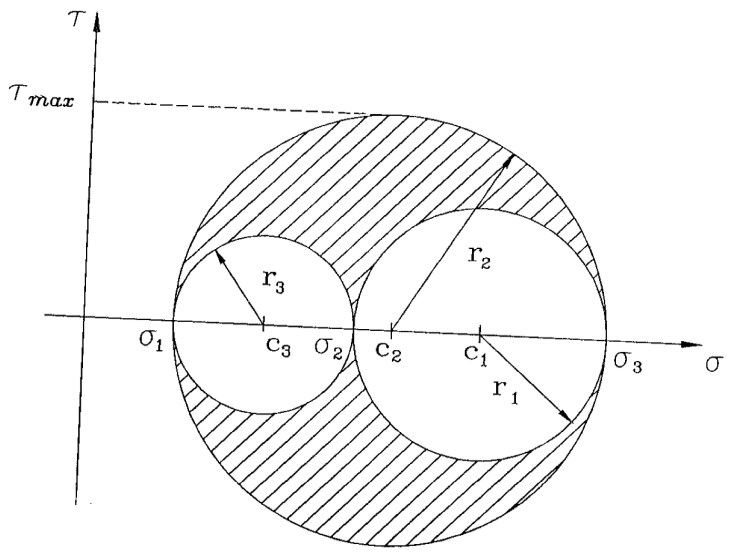


Figura 1.21 Círculos de Mohr

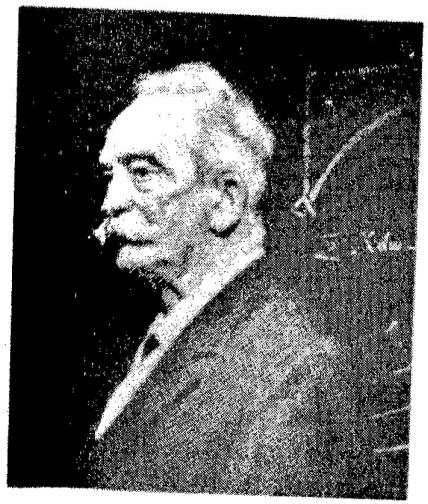


Figura 1.22 Otto Mohr[17] (1835-1918)

Nótese que cada una de las circunferencias corresponde al caso en el que se toma el signo de igualdad en el sistema (1.47). Los números c_1, c_2 y c_3 corresponden a las abscisas de cada uno de los centros de las tres circunferencias, mientras que r_1, r_2 y r_3 son los radios correspondientes.

Esta representación gráfica recibe el nombre de *círculos de Mohr* o *diagrama de representación de Mohr*, en honor al destacado ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918), quien propuso a finales del siglo pasado, en el año 1882, un método gráfico basado en las ideas aquí expuestas para la evaluación de los esfuerzos principales.

La zona rayada en la Fig. 1.21 corresponde a los pares posibles de valores (σ, τ) para una matriz de esfuerzos dada. Esto es, dada la matriz de esfuerzos en un punto, los esfuerzos normal y tangencial en un plano cualquiera corresponden a las coordenadas de un punto en la zona rayada del diagrama de Mohr.

De aquí obtenemos las siguientes conclusiones:

- No existe ningún plano donde la componente normal del vector esfuerzo sea superior a σ_3. Es decir

$$\sigma_{máx} = \sigma_3 \qquad (1.48)$$

- No existe ningún plano donde la componente normal del vector esfuerzo sea inferior a σ_1. Esto es

$$\sigma_{mín} = \sigma_1 \qquad (1.49)$$

[17] Biografía en http://www.mecha.uni-stuttgart.de/Home/home_geschichte.htm

• No existe ningún plano donde la componente tangencial del vector esfuerzo sea superior a $(\sigma_3 - \sigma_1)/2$. Se ha demostrado entonces que para un punto dado el esfuerzo de corte máximo vale

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \tag{1.50}$$

Este esfuerzo tangencial, independientemente del estado de esfuerzos particular que se esté considerando, actúa siempre en un plano con una orientación bien definida con respecto a los ejes principales. Para determinar esta orientación, nótese que en el plano correspondiente (ver Fig.1.21) la componente normal del vector esfuerzo vale

$$\sigma\big|_{\tau_{máx}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1.42) esta expresión para σ, así como la dada para τ por la Ec.(1.50), obtenemos, después de algunas manipulaciones algebraicas, que $\cos^2\alpha = \cos^2\gamma = 1/2$ y $\cos^2\beta = 0$. Esto significa que la normal al plano donde el esfuerzo de corte es máximo forma ángulos de 45°, 90° y 45° con los ejes principales *1*, *2* y *3*, respectivamente (Fig. 1.23).

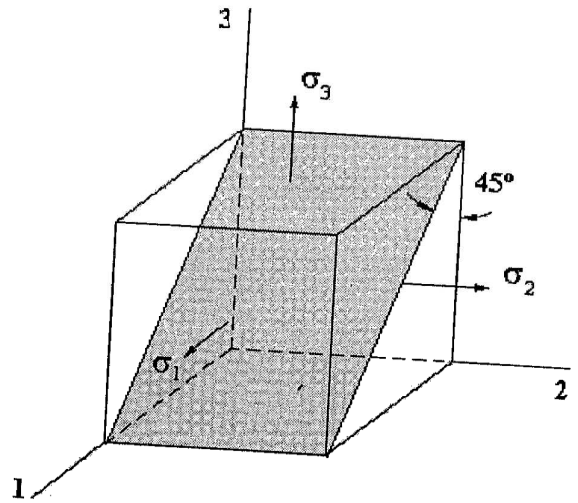


Figura 1.23 Plano donde actúa el esfuerzo de corte máximo

Ejemplo 1.7

Para el estado de esfuerzos del ejemplo 1.4, ¿Es posible que exista un plano donde las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo valgan $\sigma = 30$ MPa y $\tau = 40$ MPa?

Solución: Los esfuerzos principales determinados en el ejemplo 1.4 son $\sigma_1 = -49.3$ MPa, $\sigma_2 = 20$ MPa y $\sigma_3 = 99.3$ MPa. Utilizando las ecuaciones (1.44) y (1.45) calculamos los centros y los radios de las tres circunferencias de Mohr

$$c_1 = 59.65 \text{ MPa}, \quad c_2 = 25.0 \text{ MPa}, \quad c_3 = -14.65 \text{ MPa}$$
$$r_1 = 39.65 \text{ MPa}, \quad r_2 = 74.3 \text{ MPa}, \quad r_3 = 34.65 \text{ MPa}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1.46) se obtiene

$$\cos^2\alpha = 0.088 > 0, \quad \cos^2\beta = 0.709 > 0, \quad \cos^2\gamma = 0.203 > 0.$$

De aquí se concluye que sí es posible que exista un plano donde $\sigma = 30$ MPa y $\tau = 40$ MPa. La normal a este plano forma ángulos de 72.7°, 32.7° y 63.2° con los ejes principales *1*, *2* y *3*, respectivamente.

1.9 Solución Gráfica de Problemas

Ahora se estudiará con más detalle la representación gráfica de un estado de esfuerzos introducida en la sección precedente. Como veremos en breve, la ventaja fundamental de los círculos de Mohr radica en que, al usarlos, obtenemos una visión de conjunto sobre la situación física planteada por el estado de esfuerzos en un punto. Aún cuando en la práctica el diagrama de representación de Mohr no se utiliza para obtener los valores exactos de las variables en juego, su utilización, a manera de esbozo preliminar, constituye una herramienta de análisis sumamente efectiva y se emplea normalmente en el planteamiento conceptual de la solución de problemas de ingeniería.

Como se dijo antes, los puntos situados en la zona rayada de la Fig. 1.21 representan los posibles pares de valores (σ, τ) en un punto de un sólido al variar la orientación del plano definida por su normal **n**. Los límites de esta zona, es decir, las circunferencias de radios r_1, r_2 y r_3, tienen un significado físico bien definido. Supongamos, por ejemplo, que los esfuerzos normal y

tangencial en un cierto plano corresponden a las coordenadas de un punto perteneciente a la circunferencia de radio r_1. Entonces, de la primera de las desigualdades (1.47) se desprende que

$$\tau^2 + (\sigma - c_1)^2 = r_1^2$$

Sustituyendo esta expresión en la primera de las ecuaciones (1.46) se deduce que $\cos^2 \alpha = 0$, es decir, que $\alpha = 90°$. La conclusión es inmediata: los esfuerzos normal y tangencial en planos cuyas normales son ortogonales al eje principal *1* (es decir, en planos perpendiculares al plano definido por los ejes principales *2* y *3*) son, necesariamente, las coordenadas de los puntos pertenecientes a la circunferencia de radio r_1. Análogamente, las coordenadas de los puntos pertenecientes a la circunferencia de radio r_2 son los esfuerzos normal y tangencial en planos cuyas normales son ortogonales al eje principal *2*. De la misma manera, los esfuerzos en planos cuyas normales son perpendiculares al eje *3* son los puntos pertenecientes a la circunferencia de radio r_3.

Ahora bien, ¿Qué puede decirse, en términos generales, sobre la representación gráfica en el diagrama de Mohr de los esfuerzos normal y tangencial en un plano oblicuo cualquiera?

Para responder esta pregunta comenzamos por escribir las ecuaciones (1.46) en la forma

$$\begin{aligned}
\tau^2 + (\sigma - c_1)^2 &= r_1^2 + 4 r_2 r_3 \cos^2 \alpha \geq r_1^2 \\
\tau^2 + (\sigma - c_2)^2 &= r_2^2 - 4 r_1 r_3 \cos^2 \beta \leq r_2^2 \\
\tau^2 + (\sigma - c_3)^2 &= r_3^2 + 4 r_1 r_2 \cos^2 \gamma \geq r_3^2
\end{aligned} \qquad (1.51)$$

Estas ecuaciones nos dicen que las componentes normal σ y tangencial τ del vector esfuerzo en un plano que forma ángulos α, β y γ con los *ejes principales* $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ y $\mathbf{n}_3$, corresponden, en el diagrama de Mohr (ver Fig. 1.24), al punto de intersección $P(\sigma, \tau)$ de las tres circunferencias con centros en los puntos c_1, c_2 y c_3, definidos por la Ec. (1.44), y radios R_1, R_2 y R_3 dados por

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sqrt{r_1^2 + 4 r_2 r_3 \cos^2 \alpha} \\
R_2 &= \sqrt{r_2^2 - 4 r_1 r_3 \cos^2 \beta} \\
R_3 &= \sqrt{r_3^2 + 4 r_1 r_2 \cos^2 \gamma}
\end{aligned} \qquad (1.52)$$

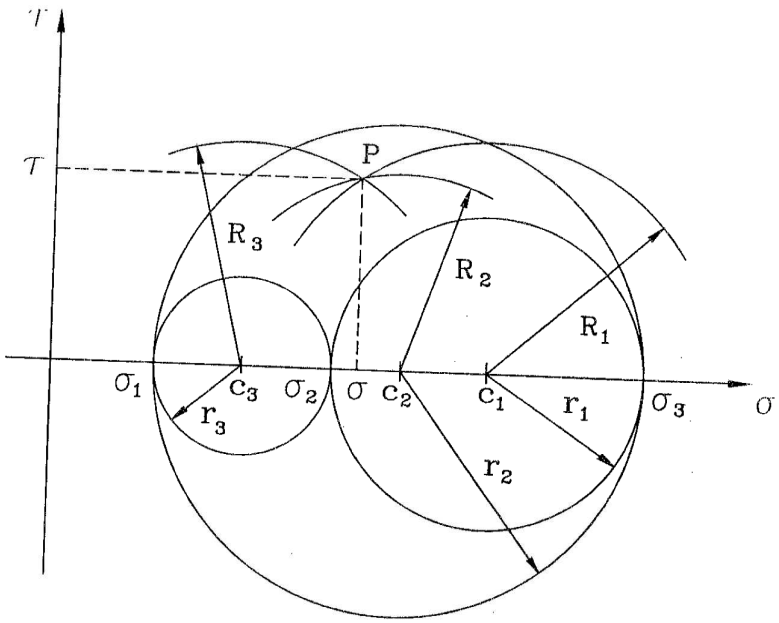


Figura 1.24 El punto P(σ,τ) viene determinado por la intersección de tres circunferencias de radios R_1, R_2 y R_3

Tracemos ahora por el punto P_1 una recta inclinada en un ángulo α con respecto a la vertical (Fig. 1.25). Esta recta intersecta a la circunferencias P_1P_2 y P_1P_3 en los puntos A y B, respectivamente. Tracemos también los segmentos AP_2, $\overline{AC_1}$ y $\overline{BC_1}$. Por geometría se sabe que los segmentos de recta $\overline{AP_1}$ y AP_2 son ortogonales. Entonces el ángulo entre $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{AP_2}$ es α. Aplicando el teorema del coseno en el triángulo AC_1P_2 tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{AC_1}^2 &= \overline{P_2C_1}^2 + \overline{AP_2}^2 + 2\,\overline{P_2C_1}\;\overline{AP_2}\cos\alpha \\
&= r_1^2 + (2 r_3 \cos\alpha)^2 + 4 r_1 r_3 \cos^2 \alpha \\
&= r_1^2 + 4 r_3 (r_3 + r_1) \cos^2 \alpha \\
&= r_1^2 + 4 r_2 r_3 \cos^2 \alpha \\
&= R_1^2
\end{aligned}$$

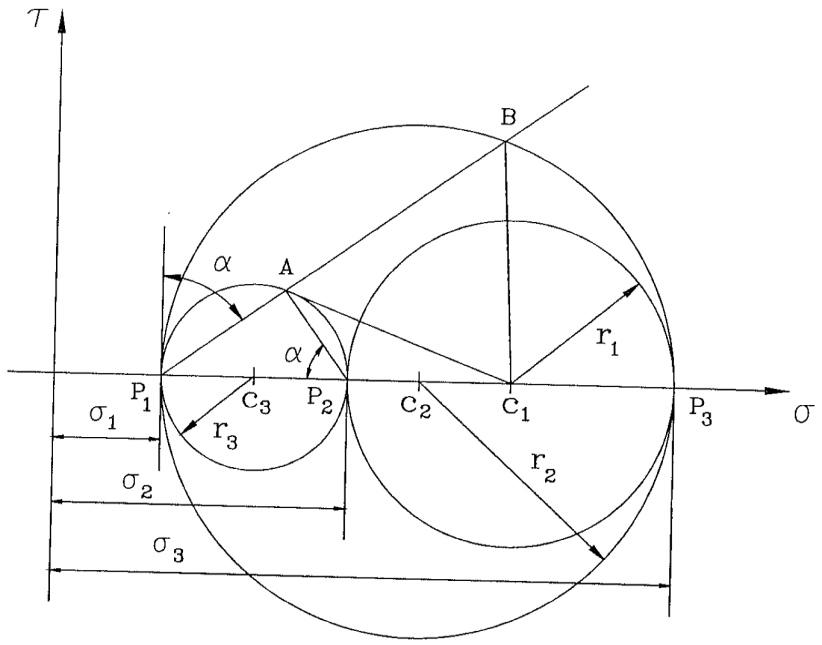


Figura 1.25 Los segmentos AC_1 y BC_1 son de igual longitud que el radio R_1 de la Fig. 1.24.

De una manera similar puede probarse que $\overline{BC_1} = R_1$. Luego el arco de circunferencia con centro en c_1 y radio R_1 al cual pertenece el punto $P(\sigma,\tau)$ pasa por A y B.

Análogamente, si trazamos por el punto P_3 de la Fig. 1.23 una recta inclinada en un ángulo γ con respecto a la vertical, esta recta intersectará a la circunferencia P_2P_3 en C y a la circunferencia P_1P_3 en D. Igual que antes, puede demostrarse que $\overline{CC_3} = \overline{DC_3} = R_3$. Luego el arco de circunferencia con centro en c_3 y radio R_3 al cual pertenece el punto $P(\sigma,\tau)$ pasa por C y D.

En resumen, para determinar las componentes normal σ y tangencial τ del vector esfuerzo sobre un plano cuya normal forma ángulos α, β y γ con los ejes principales *1*, *2* y *3*, en un punto de un sólido donde los esfuerzos principales son σ_1, σ_2 y σ_3, tenemos el siguiente

Método Gráfico

- Considérese un sistema de coordenadas $\{\sigma, \tau\}$ como el mostrado en la Fig. 1.26. En el eje de las abscisas se representan los valores de los esfuerzos normales σ, mientras que en el eje de las ordenadas se representan los esfuerzos tangenciales τ.

- Sobre el eje de las abscisas llevamos los valores de los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3, los cuales se corresponden con los puntos P_1, P_2 y P_3, respectivamente, en la Fig. 1.26.

- Con centro en los puntos c_1, c_2 y c_3, calculados con las ecuaciones (1.44), trazamos las tres circunferencias de radios r_1, r_2 y r_3, respectivamente, obtenidos mediante las ecuaciones (1.45).

- Por el punto P_1 trazamos una recta inclinada en un ángulo α con respecto a la vertical. Esta recta intersectará a la circunferencia P_1P_2 en el punto A y a la circunferencia P_1P_3 en el punto B. Seguidamente trazamos, con centro en c_1, el arco de circunferencia AB.

- Análogamente, trazamos por P_3 una recta inclinada en un ángulo γ con respecto a la vertical. Esta recta intersectará a las circunferencias P_2P_3 y P_1P_3 en los puntos C y D, respectivamente. Seguidamente trazamos, con centro en c_3, el arco de circunferencia CD.

- Los arcos AB y CD se intersectan en el punto P cuyas coordenadas nos dan, excepto el signo de τ, las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en el plano en consideración.

Para resolver el problema inverso, el cual consiste en determinar la orientación del plano donde actúan los esfuerzos σ y τ, aplicamos los primeros tres puntos del procedimiento descrito anteriormente y, a continuación, se procede de la siguiente manera:

- Sobre el diagrama de Mohr se ubica el punto P de coordenadas σ y τ (Fig. 1.26).

- Con centro en c_1 y radio $\overline{C_1P}$ trazamos el arco de circunferencia AB. Seguidamente se traza una recta que pase por los puntos de intersección A y B; esta recta pasará también por el punto P_1. El ángulo que forma esta recta con la vertical trazada por P_1 nos da el ángulo α que forma la normal al plano con el eje principal *1*.

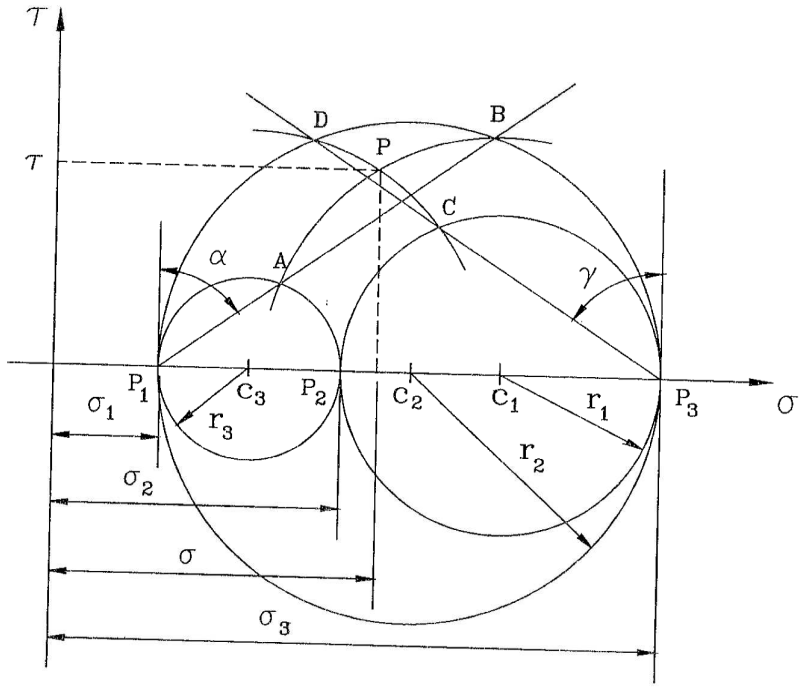


Figura 1.26 Método Gráfico

• Análogamente, con centro en c_3 y radio $\overline{C_3P}$ trazamos el arco de circunferencia *CD*. Seguidamente se traza una recta que pase por los puntos de intersección *C* y *D*; esta recta pasará también por el punto P_3. El ángulo que forma esta recta con la vertical trazada por P_3 nos da el ángulo γ que forma la normal al plano con el eje principal *3*.

• Conocidos α y γ, el ángulo β que forma la normal al plano con el eje principal *2* queda definido automáticamente por la Ec. (1.33) de los cosenos directores. ■

Obsérvese que en la construcción del diagrama de Mohr solo ha sido necesario utilizar los ángulos α y γ para la determinación gráfica del punto $P(\sigma, \tau)$. Esto es así debido justamente a que solo dos de los tres ángulos son independientes, pudiendo el tercero de ellos expresarse en términos de los otros dos por medio de la Ec. (1.33). Sin embargo, la representación gráfica del

ángulo β en el diagrama de Mohr puede llevarse a cabo trazando por P, dos rectas, una hacia la izquierda y otra hacia la derecha, que formen cada una un ángulo β con la vertical (Fig. 1.27). Estas rectas intersectarán a la circunferencia P_1P_2 en el punto E y a la circunferencia P_2P_3 en el punto F. Seguidamente trazamos, con centro en c_2, el arco de circunferencia EF. Este arco pasará también por el punto P.

De esta manera concluimos que en el diagrama de Mohr se pueden utilizar dos cualesquiera de los tres ángulos α, β y γ. En la Fig. 1.27 se han utilizado, por ejemplo, los ángulos α y β.

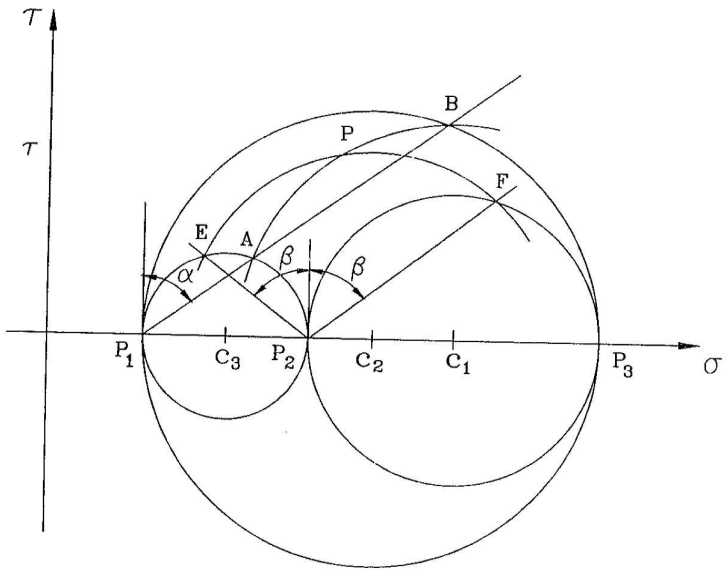


Figura 1.27 Representación del ángulo β en el diagrama de Mohr.

Ejemplo 1.8

El estado de esfuerzos en un punto está definido como se muestra en la Fig. 1.28.

a) Calcular los esfuerzos principales
b) Construir el diagrama de Mohr
c) Determinar gráficamente el esfuerzo de corte máximo
d) Determinar gráficamente los esfuerzos normal y tangencial en el plano cuya normal forma ángulos de 30°, 60° y 90° con los ejes *1*, *2* y *3*.

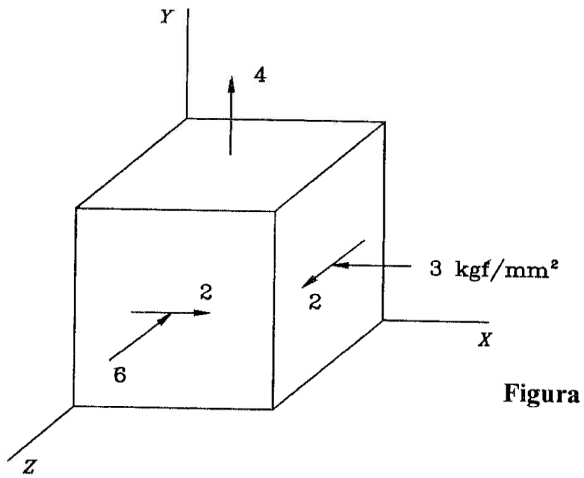


Figura 1.28 Estado de esfuerzos del ejemplo 1.8

Solución: Según la convención de signos adoptada, la matriz de esfuerzos correspondiente a la Fig. 1.28 es la siguiente

$$\sigma = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ kgf/mm}^2$$

a) Los esfuerzos principales se calculan a través del determinante (1.28)

$$\begin{vmatrix} -(3+\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -(6+\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante tenemos

$$(4-\lambda)(\lambda^2+9\lambda+14)=0$$

Las tres soluciones de esta ecuación son

$$\sigma_1 = -7 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_2 = -2 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_3 = 4 \text{ kgf/mm}^2$$

Como en el ejemplo 1.4, planteamos el sistema de ecuaciones (1.27c), junto con la Ec. (1.33) para cada esfuerzo principal, para obtener las tres direcciones principales

$$\alpha_1 = 116.6°, \quad \beta_1 = 90°, \quad \gamma_1 = 26.6°$$
$$\alpha_2 = 26.6°, \quad \beta_2 = 90°, \quad \gamma_2 = 63.4°$$
$$\alpha_3 = 90°, \quad \beta_3 = 0°, \quad \gamma_3 = 90°$$

La representación gráfica de estos resultados se muestra en la Fig. 1.29.

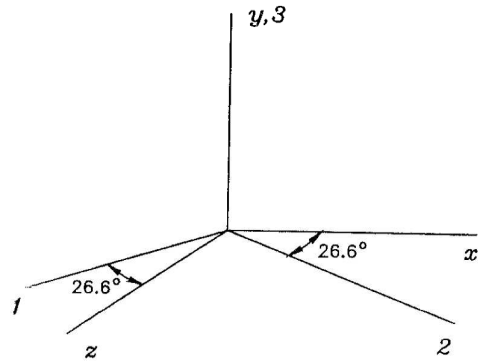


Figura 1.29 Direcciones principales del ejemplo 1.8

b) El diagrama de Mohr para este estado de esfuerzos se muestra en la Fig. 1.30.

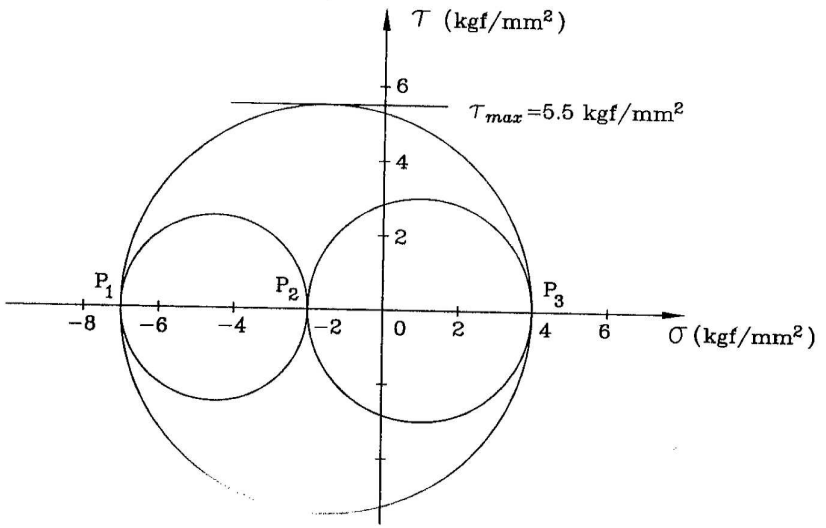


Figura 1.30 Círculos de Mohr del ejemplo 1.8

c) El esfuerzo de corte máximo es el radio de la circunferencia P_1P_3 (Fig. 1.30); es decir

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = 5.5 \text{ kgf/mm}^2$$

d) Por el punto P_1 trazamos una recta inclinada en un ángulo $\alpha = 30°$ con respecto a la vertical. Esta recta intersectará a la circunferencia P_1P_2 en el punto A y a la circunferencia P_1P_3 en el punto B (Fig. 1.31). Con centro en la circunferencia P_2P_3 trazamos el arco AB.

Análogamente, trazamos por P_3 una recta inclinada en un ángulo $\gamma = 90°$ con respecto a la vertical. Esta recta es, por supuesto, horizontal e intersecta a las circunferencias P_2P_3 y P_1P_3 en los puntos $C = P_2$ y $D = P_1$, respectivamente. Con centro en la circunferencia P_1P_2 trazamos el arco CD que, en este caso, coincide con la propia circunferencia P_1P_2. Los arcos AB y CD se intersectan en el punto P perteneciente a la circunferencia P_1P_2. Las coordenadas de este punto son

$$\sigma = -5.8 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau = 2.2 \text{ kgf/mm}^2$$

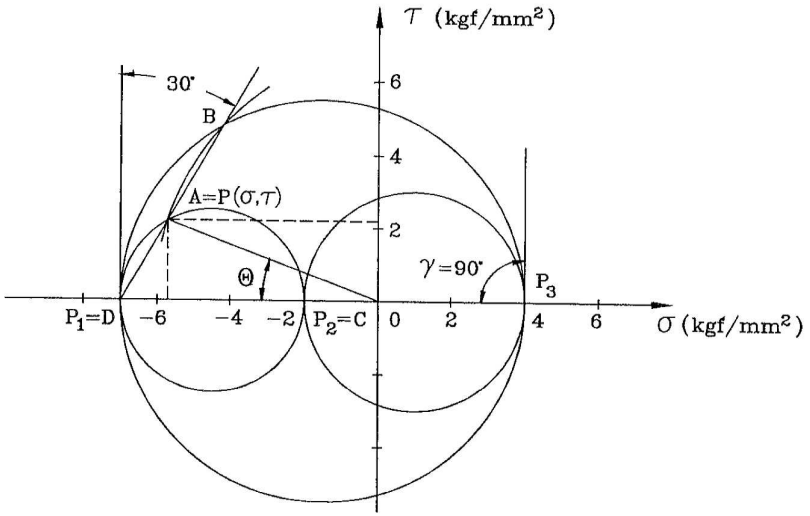


Figura 1.31 Determinación de los esfuerzos normal y tangencial en el ejemplo 1.8

El hecho de que el punto P pertenezca a la circunferencia P_1P_2 es una consecuencia inmediata de que la normal al plano en estudio sea perpendicular al eje 3.

La magnitud del vector esfuerzo sobre el plano en consideración puede obtenerse como la longitud del radio vector $\overline{OP}$, y vale

$$T = |\overline{OP}| = 6.2 \text{ kgf/mm}^2$$

El ángulo que forma el vector esfuerzo con la normal al plano puede obtenerse en el diagrama de Mohr como el ángulo que forma el radio vector OP con el eje de las abscisas (ver Fig. 1.31). En este ejemplo su valor es $\theta = 20.7°$.

1.10 Esfuerzos Octaedrales

Se llama *plano octaedral* a aquel cuya normal forma ángulos iguales con los ejes principales (Fig. 1.32a). Se le da el nombre de plano octaedral porque en cada punto de un sólido existen ocho planos que cumplen con esta definición, uno en cada octante del sistema de coordenadas principal, formando un octaedro (Fig. 1.32b).

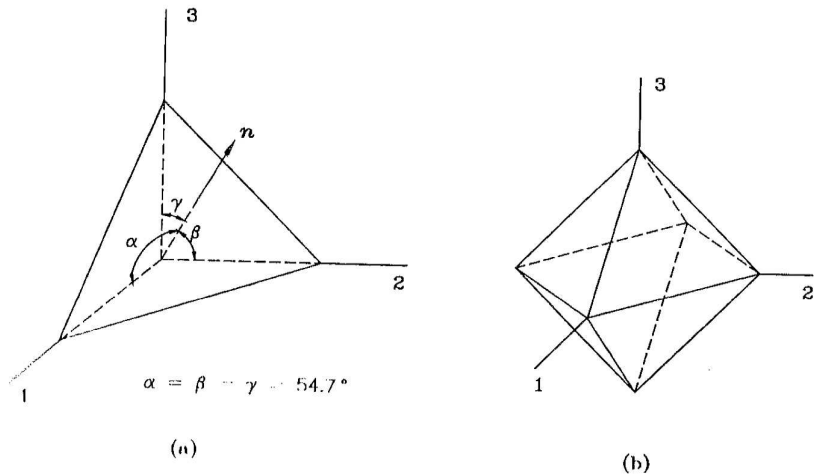


Figura 1.32 (a) Plano octaedral. (b) Octaedro

A las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en un plano octaedral se les da el nombre de *esfuerzos octaedrales*. Estos esfuerzos son idénticos en cada una de las caras del octaedro.

Como se estudiará en el Cap. 4, una de las teorías de falla que se utilizan para predecir la resistencia de un sólido se basa en la comparación del esfuerzo de corte octaedral con un valor experimental de referencia para el material. De allí nuestro interés en el análisis de los esfuerzos que actúan en estos planos octaedrales.

Entonces, en un plano octaedral se tiene que

$$|\cos\alpha| = |\cos\beta| = |\cos\gamma|$$

donde α, β y γ son los ángulos que forma la normal con los ejes principales. En virtud de la Ec. (1.33), se tiene que $3\cos^2\alpha = 1$. Por lo tanto

$$|\cos\alpha| = |\cos\beta| = |\cos\gamma| = 1/\sqrt{3}$$

lo que implica que $\alpha = \beta = \gamma = 54.7°$ para el plano del primer octante (Fig. 1.32a).

Utilizando la Ec. (1.36) se tiene que el esfuerzo normal en un plano octaedral vale

$$\sigma_{oct} = \tfrac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{1.53}$$

De igual manera, usando las Ecs. (1.35) y (1.37) se tiene que el esfuerzo tangencial o de corte en un plano octaedral vale

$$\tau_{oct}^2 = T_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2$$

$$= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2)\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3\right]$$

O bien

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2} \tag{1.54}$$

La solución gráfica de este problema se muestra en la Fig. 1.33.

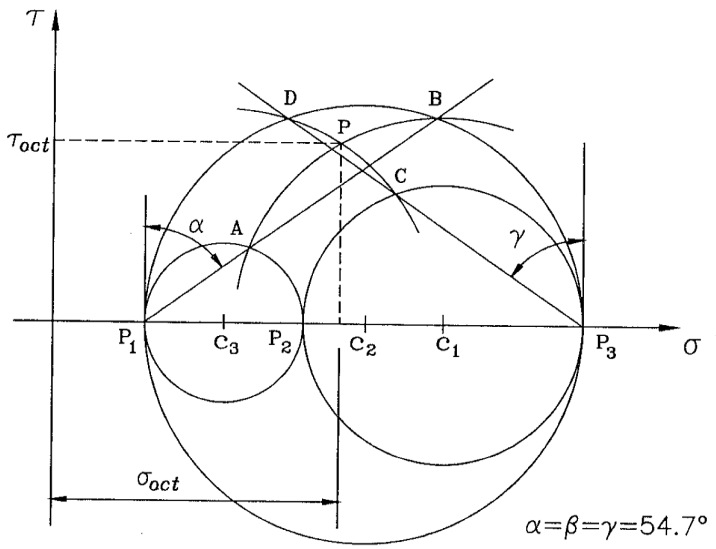


Figura 1.33 Representación de los esfuerzos octaedrales en el diagrama de Mohr

Los esfuerzos octaedrales pueden también expresarse directamente en términos de las componentes de la matriz de esfuerzos referida a un sistema de coordenadas cualquiera *xyz*. Con este propósito, evaluemos en primer lugar los tres invariantes de la matriz de esfuerzos en términos de los esfuerzos principales mediante las Ecs (1.30) para obtener

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, las ecuaciones (1.53) y (1.54) pueden escribirse en términos de estos invariantes como

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1 \tag{1.56}$$

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \tag{1.57}$$

Sustituyendo ahora las expresiones generales para los invariantes dadas por las Ecs. (1.30) se obtiene finalmente

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1.58}$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \tag{1.59}$$

Nótese que al poder expresar los esfuerzos octaedrales en términos de los invariantes de la matriz de esfuerzos, ellos mismos son también invariantes y, por lo tanto, no dependen del sistema de coordenadas.

1.11 Estado Plano de Esfuerzos

Se dice que un estado de esfuerzos es *plano* si uno de los esfuerzos principales es nulo.

Supongamos, por ejemplo, que el eje z es la dirección principal según la cual el esfuerzo principal correspondiente es nulo[18]. Luego, como σ_z es un esfuerzo principal, se tiene que $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. En estas circunstancias, para un estado plano de esfuerzos tenemos

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{1.60}$$

De manera, pues, que un estado plano de esfuerzos queda definido únicamente por las tres componentes σ_x, σ_y y τ_{xy}. La matriz de esfuerzos es entonces

[18] Todas las ecuaciones y gráficos serán deducidos bajo esta suposición. Cuando el eje principal según el cual el esfuerzo principal es nulo coincida con un eje coordenado distinto al z, estas ecuaciones pueden seguir utilizándose siempre que se modifiquen mediante una permutación circular de los índices x, y, z.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.61}$$

En la Fig. 1.34 se muestra la representación de un estado plano de esfuerzos en un elemento de volumen.

El estudio particular de un estado plano de esfuerzos, en términos de los conceptos presentados y de las relaciones deducidas previamente para un estado tridimensional, tiene suma importancia debido a que, en la práctica, la gran mayoría de los problemas puede formularse bajo esta hipótesis.

En un estado plano de esfuerzos se conoce, por definición, una de las direcciones principales. Para el sistema particular de coordenadas que se ha adoptado, esta dirección coincide con el eje z. Entonces se sabe, por la propiedad de ortogonalidad, que los otros dos esfuerzos principales deben estar contenidos en un plano perpendicular al eje z, es decir, deben actuar sobre planos ortogonales al plano xy.

Motivados por esta idea, nos proponemos resolver ahora el siguiente problema: Conocido el estado de esfuerzos definido por σ_x, σ_y y τ_{xy} (ver Fig. 1.34), ¿Cuánto valen las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en un plano perpendicular al plano xy y cuya normal forma un ángulo θ con el eje x?

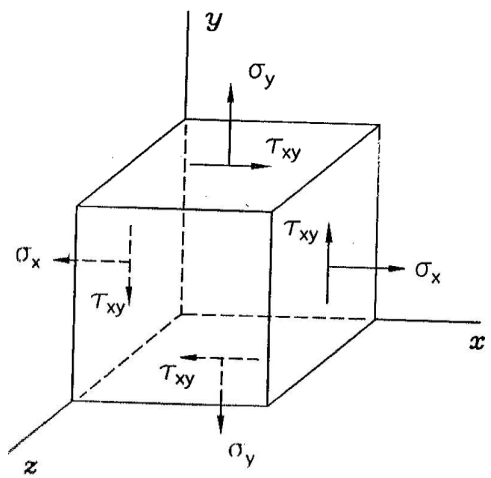


Figura 1.34 Estado plano de esfuerzos

Si cortamos el cubo elemental de la Fig. 1.34 mediante el plano descrito anteriormente y hacemos un diagrama de cuerpo libre de una de las partes resultantes (Fig. 1.35), tendremos, aplicando la fórmula de Cauchy, que sobre dicho plano actuará el vector esfuerzo

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.62}$$

Este vector, como se observa, está contenido en un plano paralelo al plano xy. Resulta conveniente, por lo tanto, usar un sistema de coordenadas $x_1y_1z_1$ para definir la orientación del referido plano y de las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo. El eje z_1 de este nuevo sistema de coordenadas coincide con el eje z del sistema original, mientras que los ejes x_1 y y_1 están rotados en un ángulo θ en sentido antihorario alrededor del eje z (ver Fig. 1.32). De esta forma, las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo pueden simbolizarse como σ_{x1} y τ_{x1y1}, respectivamente.

Por conveniencia, siempre que sea posible, en vez de representar el elemento de volumen en tres dimensiones, consideraremos más bien su proyección ortogonal en el plano xy (Fig. 1.36).

De acuerdo con la convención de signos general establecida en la Sec. 1.5, conviene establecer una más específica para un estado plano de esfuerzos:

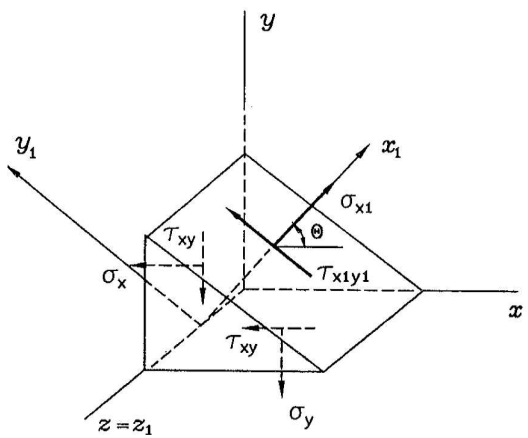


Figura 1.35 Esfuerzos normal y tangencial en un plano inclinado

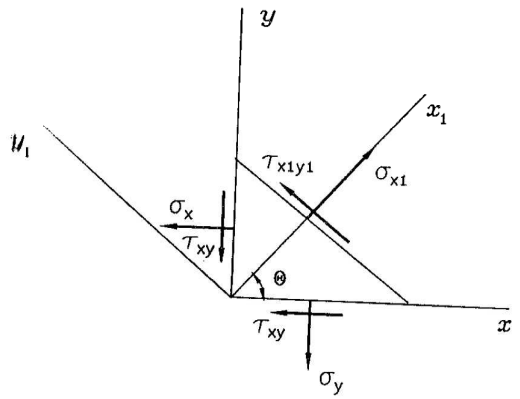


Figura 1.36 Representación en dos dimensiones de los esfuerzos normal y tangencial

Convención de Signos

- El ángulo θ se considera positivo si se mide en sentido antihorario y negativo en caso contrario.
- El esfuerzo normal σ_{x1} es positivo si es de tracción y negativo si es de compresión.
- El esfuerzo tangencial τ_{x1y1} es positivo si apunta en la dirección positiva del eje y_1

A partir de la Ec. (1.62) tenemos entonces que el esfuerzo normal será

$$\sigma_{x1} = \mathbf{T} \circ \mathbf{n} = \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{T}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\sigma_{x1} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{1.63}$$

Análogamente, el esfuerzo tangencial o de corte será

$$\tau_{x1y1} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \circ \mathbf{T}$$

Es decir

$$\tau_{x1y1} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es

$$\tau_{x1y1} = (\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \tag{1.64}$$

Teniendo presente las ecuaciones trigonométricas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

y transformando las expresiones (1.63) y (1.64), obtenemos

$$\sigma_{x1} = \frac{1}{2}\sigma_x(1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{2}\sigma_y(1 - \cos 2\theta) + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x1y1} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

O bien,

$$\sigma_{x1} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{1.65}$$

$$\tau_{x1y1} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Estas expresiones se denominan *ecuaciones de transformación* para un estado plano de esfuerzos[19] y sirven para determinar las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en un plano genérico perpendicular al plano xy y cuya normal forma un ángulo θ con el eje x.

[19] Estas expresiones pueden también obtenerse mediante la ecuación de transformación (1.25)

En particular, para $\theta = 0°$ (ver Fig. 1.37a):

$$\sigma_{x1}(0°) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)(1) + \tau_{xy}(0) = \sigma_x$$

$$\tau_{x1y1}(0°) = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)(0) + \tau_{xy}(1) = \tau_{xy}$$

De manera similar, para $\theta = 90°$ (ver Fig. 1.37b):

$$\sigma_{x1}(90°) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)(-1) + \tau_{xy}(0) = \sigma_y$$

$$\tau_{x1y1}(90°) = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)(0) + \tau_{xy}(-1) = -\tau_{xy}$$

Nótese que, en este último caso, el esfuerzo de corte τ_{xy} sobre el plano cuya normal es el eje y se corresponde con el esfuerzo de corte en el plano de normal $x1$ para un ángulo $\theta = 90°$ (ver Fig. 1.37b). Si este esfuerzo de corte es positivo en el sistema de coordenadas xy, entonces en este plano apuntará en la dirección negativa del eje y_1. Luego, de acuerdo con la convención de signos adoptada, este esfuerzo de corte es negativo cuando se refiere al sistema de coordenadas x_1y_1.

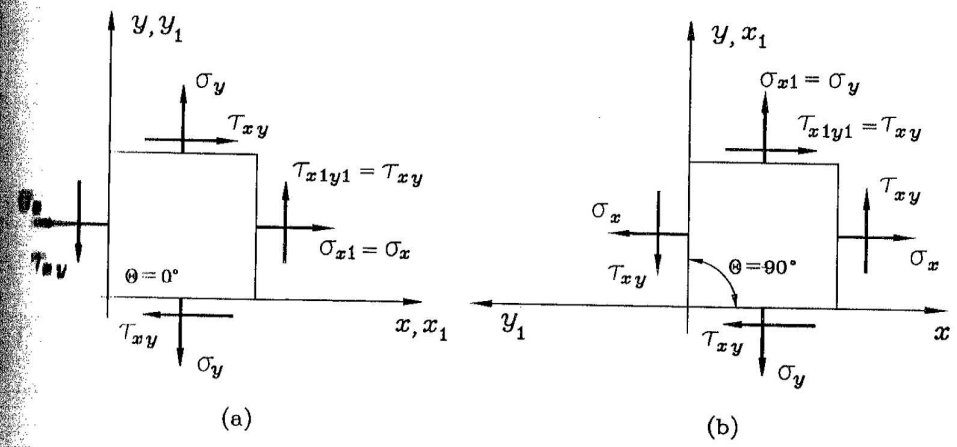


Figura 1.37 Estado plano de esfuerzos: a) Esfuerzos en el plano $\theta = 0°$; b) Esfuerzos en el plano $\theta = 90°$.

Se deja como ejercicio para el lector el análisis de los casos correspondientes a $\theta = 180°$ y $\theta = 270°$.

Volvamos ahora al asunto de los ejes principales. Como se dijo al principio de esta sección, dos de los ejes principales están contenidos en el plano xy. De la Sec. 1.7 se sabe que en los planos principales el esfuerzo de corte es nulo. Entonces, en la segunda de las Ecs. (1.65) hacemos $\tau_{x1y1} = 0$ y obtenemos[20]

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{1.66}$$

Para este valor del ángulo θ obtenemos uno de los esfuerzos principales. El otro esfuerzo principal se encuentra en un plano cuya normal forma un ángulo $\theta_2 = \theta_1 + 90°$ con respecto al eje x. Por supuesto, puede comprobarse que en este segundo plano también $\tau_{x1y1} = 0$.

Para determinar los esfuerzos principales correspondientes, basta con sustituir en la primera de las ecuaciones (1.65) los valores obtenidos para el ángulo θ. A este respecto no resulta difícil comprobar, a partir de la Ec. (1.66), que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\theta_1 &= \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \cos 2\theta_1 &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{aligned} \tag{1.67}$$

Sustituyendo estas expresiones en la primera de las Ecs. (1.65), tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{x1}(\theta_1) &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\,\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \frac{2\tau_{xy}^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\,\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{aligned}$$

[20] La ecuación (1.66) debe utilizarse con sumo cuidado; *antes* de aplicar el factor 1/2, los signos del numerador y del denominador en la función arcotangente deben tomarse en cuenta a los efectos de determinar el cuadrante al cual pertenece el ángulo doble. Una vez que esto se ha hecho, se procede a la división por dos, pero no antes!

Esto es

$$\sigma_{x1}(\theta_1) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.68}$$

Este es el valor de uno de los esfuerzos principales. El otro esfuerzo principal, tal como ya se dijo, actúa en un plano cuya normal forma una ángulo $\theta_2 = \theta_1 + 90°$ con respecto al eje x. Usando las Ecs. (1.67) tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\theta_2 &= \operatorname{sen}(2\theta_1 + 180°) \\ &= -\operatorname{sen} 2\theta_1 \\ &= -\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_2 &= \cos(2\theta_1 + 180°) \\ &= -\cos 2\theta_1 \\ &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la primera de las Ecs. (1.65) obtenemos después de algunas manipulaciones,

$$\sigma_{x1}(\theta_2) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.69}$$

Comparando las Ecs. (1.68) y (1.69) se observa que $\sigma_{x1}(\theta_1) > \sigma_{x1}(\theta_2)$. Designando con $\sigma_1^* = \sigma_{x1}(\theta_1)$ al mayor de estos dos esfuerzos principales y con $\sigma_2^* = \sigma_{x1}(\theta_2)$ al menor de ellos, tenemos finalmente

$$\sigma_{1,2}^* = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.70}$$

Dependiendo de los valores que se obtengan para estos dos esfuerzos principales en el plano xy, posteriormente se realiza la asignación general a los

esfuerzos σ_1, σ_2 y σ_3, en el entendido, como se estableció, que $\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$. Así, por ejemplo, si $\sigma_1^* > \sigma_2^* > 0$, entonces $\sigma_3 = \sigma_1^*$, $\sigma_2 = \sigma_2^*$ y $\sigma_3 = 0$. Por el contrario, si $\sigma_1^* > 0$ y $\sigma_2^* < 0$, entonces $\sigma_3 = \sigma_1^*$, $\sigma_2 = 0$ y $\sigma_1 = \sigma_2^*$, y así sucesivamente.

Ejemplo 1.9

Cuando se le aplica un cierto sistema de cargas a un miembro de una estructura, en su punto más crítico se genera el estado de esfuerzos mostrado en la Fig. 1.38a. Manteniendo fijo este sistema de cargas, a dicho miembro se le superpone otro sistema de cargas que genera el estado de corte puro mostrado en la Fig. 1.38b. Sabiendo que en ambos casos el estado de esfuerzos es plano, determine:

a) El rango de valores que puede tomar el esfuerzo de corte τ de manera que la superposición de ambos estados de esfuerzos produzca un esfuerzo principal máximo inferior a 150 MPa.
b) El valor del esfuerzo de corte τ para el cual la superposición de ambos estados de esfuerzos hace que el esfuerzo principal máximo sea mínimo.

Solución: Par resolver este problema utilizaremos el denominado *principio de superposición de causas y efectos*, el cual será estudiado con detalle en el Cap. 5. Este principio establece que el estado de esfuerzos generado en cualquier punto de un sólido por el efecto de varios sistemas de cargas que actúan de manera simultánea sobre el sólido puede obtenerse mediante la suma de los estados de esfuerzos que individualmente genera cada sistema de cargas.

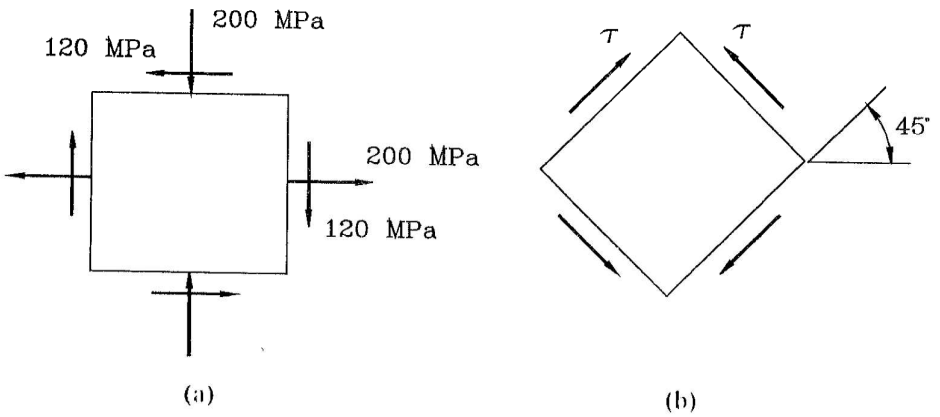


Figura 1.38 Dos estados de esfuerzos superpuestos

Ahora bien, para poder sumar dos estados de esfuerzos diferentes, éstos deben estar referidos a un único sistema de coordenadas. Fijemos entonces los sistemas de coordenadas mostrados en la Fig. 1.39. Sean $\sigma^{(a)}$ y $\sigma^{(b)}$ las matrices de esfuerzos correspondientes a los sistemas de cargas (a) y (b), respectivamente. Dado que los esfuerzos principales no dependen del sistema de coordenadas elegido, podemos expresar todos los esfuerzos en cualquiera de los dos sistemas.

Una alternativa sería, por ejemplo, expresar la matriz de esfuerzos del sistema de cargas (a) en las coordenadas x_1y_1 correspondientes al sistema de cargas (b). En este caso usamos entonces las ecuaciones de transformación (1.65) para obtener, en primer lugar, los esfuerzos normal y tangencial en un plano perpendicular al eje x_1:

$$\sigma_{x_1}^{(a)} = \frac{1}{2}(200-200) + \frac{1}{2}(200+200)\cos(2\times 45°) - 120\,\text{sen}(2\times 45) = -120\,\text{MPa}$$

$$\tau_{x_1y_1}^{(a)} = -\frac{1}{2}(200+200)\,\text{sen}(2\times 45°) - 120\,\cos(2\times 45°) = -200\,\text{MPa}$$

Para completar nuestra matriz de esfuerzos del sistema de cargas (a) expresada en coordenadas del sistema de cargas (b), usamos ahora la primera de las Ecs. (1.65) con $\theta = 135°$ para obtener el esfuerzo normal en el plano perpendicular al eje y_1:

$$\sigma_{y_1}^{(a)} = \frac{1}{2}(200-200) + \frac{1}{2}(200+200)\cos(2\times 135°) - 120\,\text{sen}(2\times 135) = 120\,\text{MPa}$$

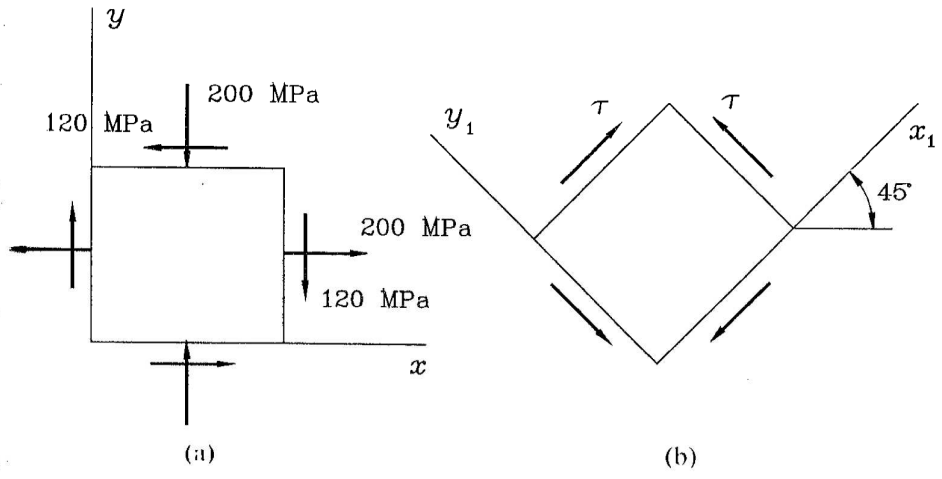


Figura 1.39 Sistemas de coordenadas utilizados en el ejemplo 1.9

Luego, la matriz de esfuerzos $\sigma^{(a)}$ en el sistema de coordenadas x_1y_1 sería

$$\boldsymbol{\sigma}^{(a)} = \begin{bmatrix} -120 & -200 & 0 \\ -200 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

La matriz de esfuerzos $\sigma^{(b)}$ correspondiente al sistema de cargas (b) puede obtenerse directamente de la Fig. 1.39b:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(b)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Luego, la matriz de esfuerzos resultante será

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(a)} + \boldsymbol{\sigma}^{(b)} = \begin{bmatrix} -120 & \tau - 200 & 0 \\ \tau - 200 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Usamos ahora la Ec. (1.70) para calcular los esfuerzos principales correspondiente al estado de esfuerzos resultante:

$$\sigma^*_{1,2} = \tfrac{1}{2}(-120+120) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(-120-120)^2 + (\tau-200)^2}$$

$$= \pm\sqrt{\tau^2 - 400\tau + 54400} \text{ MPa}$$

De donde se concluye que el esfuerzo principal máximo es

$$\sigma_3 = \sqrt{\tau^2 - 400\tau + 54400} \text{ MPa}$$

Otra alternativa para determinar los esfuerzos principales consistiría en expresar ahora la matriz de esfuerzos del sistema de cargas (b) en las coordenadas xy correspondientes al sistema de cargas (a). En este caso nuestra base de referencia inicial es el sistema de coordenadas x_1y_1. Para determinar los esfuerzos normal y tangencial en el plano perpendicular al eje coordenadas x usamos las ecuaciones de transformación (1.65) con $\theta = 45°$ pues el eje x

forma justamente un ángulo de 45° en sentido horario con respecto al eje x_1 (ver Fig. 1.39). Entonces

$$\sigma_x^{(b)} = \frac{1}{2}(0+0) + \frac{1}{2}(0-0)\cos(-2\times 45°) + \tau\,\text{sen}(-2\times 45) = -\tau$$

$$\tau_{xy}^{(b)} = -\frac{1}{2}(0+0)\,\text{sen}(-2\times 45°) + \tau\cos(-2\times 45°) = 0$$

Para completar nuestra matriz de esfuerzos del sistema de cargas (b) expresada en coordenadas del sistema de cargas (a), usamos ahora la primera de las Ecs. (1.65) con $\theta = 45°$ para obtener el esfuerzo normal en el plano perpendicular al eje y:

$$\sigma_y^{(b)} = \frac{1}{2}(0+0) + \frac{1}{2}(0-0)\cos(2\times 45°) + \tau\,\text{sen}(2\times 45°) = \tau$$

Luego, la matriz de esfuerzos $\sigma^{(b)}$ en el sistema de coordenadas xy sería

$$\boldsymbol{\sigma}^{(b)} = \begin{bmatrix} -\tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

La matriz de esfuerzos $\sigma^{(a)}$ correspondiente al sistema de cargas (a) puede obtenerse directamente de la Fig. 1.39a:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(a)} = \begin{bmatrix} 200 & -120 & 0 \\ -120 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Luego, la matriz de esfuerzos resultante será

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(a)} + \boldsymbol{\sigma}^{(b)} = \begin{bmatrix} 200-\tau & -120 & 0 \\ -120 & \tau - 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Usando ahora la Ec. (1.70) para calcular los esfuerzos principales correspondientes al estado de esfuerzos resultante obtenemos:

$$\sigma^*_{1,2} = \tfrac{1}{2}(200 - \tau + \tau - 200) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(200 - \tau - \tau + 200)^2 + (-120)^2}$$

$$= \pm\sqrt{\tau^2 - 400\tau + 54400} \text{ MPa}$$

De donde

$$\sigma_3 = \sqrt{\tau^2 - 400\tau + 54400} \text{ MPa} \qquad \text{(a)}$$

Concluimos así, como era de esperar, que el esfuerzo principal máximo no depende del sistema de coordenadas adoptado.

Pasamos ahora a responder las preguntas específicas de nuestro problema.

a) Para que el esfuerzo principal máximo sea inferior a 150 MPa debe cumplirse que

$$\sqrt{\tau^2 - 400\tau + 54400} \leq 150$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta desigualdad tenemos

$$\tau^2 - 400\tau + 54400 \leq 22500$$

Trasponiendo términos para completar un cuadrado perfecto en el miembro de la izquierda obtenemos

$$\tau^2 - 400\tau + 40000 \leq 8100$$

Es decir

$$(\tau - 200)^2 \leq 8100$$

De donde se concluye que

$$-90 \leq \tau - 200 \leq 90$$

Esto es

$$110 \leq \tau \leq 290$$

Es decir, para $\tau = 110$ MPa y $\tau = 290$ MPa el esfuerzo principal máximo vale $\sigma_3 = 150$ MPa, mientras que para cualquier valor de τ comprendido en el intervalo (110, 290) MPa, el esfuerzo principal máximo es menor que 150 MPa

b) Con el fin de determinar el valor mínimo del esfuerzo principal máximo derivamos el esfuerzo principal máximo σ_3 con respecto a τ para obtener

$$\frac{d\sigma_3}{d\tau} = \frac{\tau - 200}{\sqrt{\tau^2 - 400\tau + 54400}}$$

Esta derivada es cero para $\tau = 200$ MPa. Para ver si en este punto existe un máximo o un mínimo, calculamos la segunda derivada de σ_3 en $\tau = 200$ MPa, para obtener

$$\left.\frac{d^2\sigma_3}{d\tau^2}\right|_{\tau=200} = \left.\frac{14400}{(\tau^2 - 400\tau + 54400)^{3/2}}\right|_{\tau=200} = \frac{1}{120} > 0$$

Luego, como la segunda derivada es positiva, para $\tau = 200$ MPa el esfuerzo principal máximo es mínimo. Este valor mínimo de σ_3 es 120 MPa.

En la Fig. 1.40 se muestra un gráfico que proporciona una visión global sobre la influencia del esfuerzo de corte τ en el esfuerzo principal máximo.

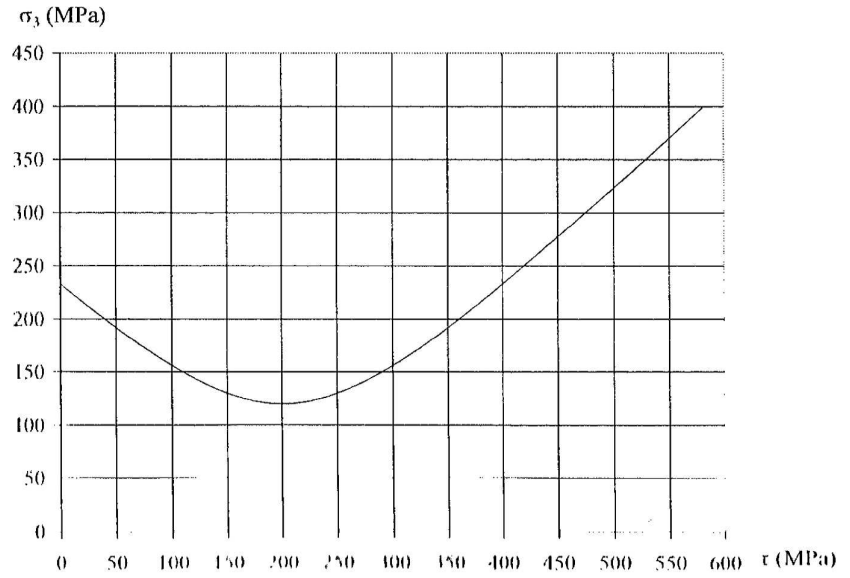


Figura 1.40 Variación del esfuerzo principal máximo versus τ en el ejemplo 1.9

1.12 Diagrama de Mohr para un Estado Plano de Esfuerzos

Expondremos ahora un método gráfico para determinar las componentes σ_{x1} y τ_{x1y1} del vector esfuerzo en un plano genérico. El método que se presentará, basado en el diagrama de representación de Mohr estudiado en la Sec. 1.8, permitirá incluso determinar gráficamente los esfuerzos principales, tanto su magnitud como su dirección.

Considérese entonces las ecuaciones de transformación (1.65). Transfiriendo al primer miembro el término ½ $(\sigma_x + \sigma_y)$ en la primera de las Ecs. (1.65), y elevando al cuadrado ambos términos de ésta y de la segunda ecuación, se tiene

$$\begin{cases} \left[\sigma_{x1} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta\right]^2 \\ \tau_{x1y1}^2 = \left[-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right]^2 \end{cases}$$

Esto es

$$\begin{cases} \left[\sigma_{x1} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2\cos^2 2\theta + \\ \qquad + \tau_{xy}(\sigma_x - \sigma_y)\,\text{sen}\,2\theta\cos 2\theta + \tau_{xy}^2\,\text{sen}^2\,2\theta \\ \tau_{x1y1}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2\,\text{sen}^2\,2\theta - \\ \qquad - \tau_{xy}(\sigma_x - \sigma_y)\,\text{sen}\,2\theta\cos 2\theta + \tau_{xy}^2\cos^2 2\theta \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro y simplificando términos, obtenemos finalmente

$$\left[\sigma_{x1} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau_{x1y1}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (1.71)$$

Esta es la ecuación de una circunferencia en el plano cartesiano $\{\sigma_{x1}, \tau_{x1y1}\}$, denominada circunferencia de Mohr para un estado plano de esfuerzos (ver Fig. 1.41).

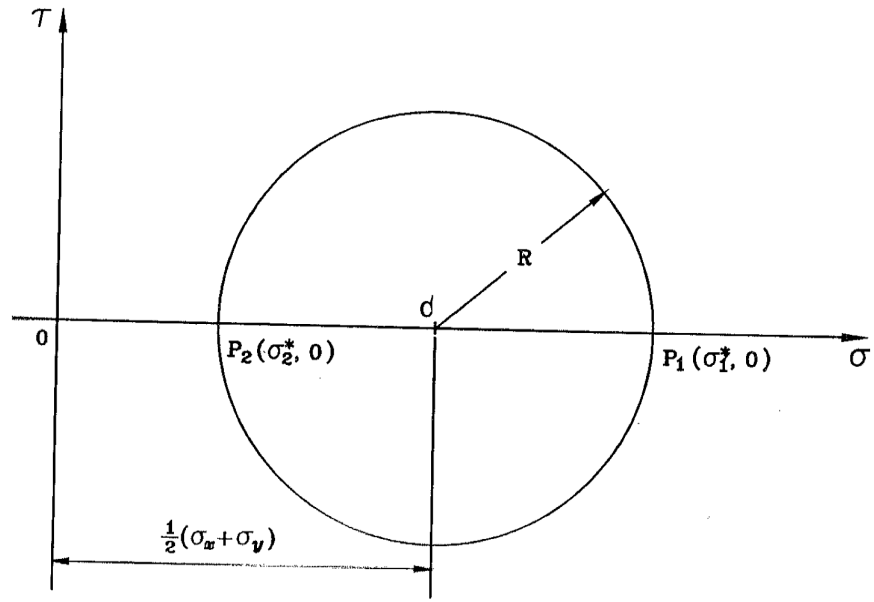
Su centro está ubicado en el punto

$$C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) \qquad (1.72)$$

y su radio es

$$R = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (1.73)$$

Las ecuaciones de transformación (1.65) pueden visualizarse ahora como las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de Mohr (1.71) en términos del partámetro θ, mientras que las coordenadas de cada punto sobre la circunferencia de Mohr vienen a ser precisamente los esfuerzos genéricos σ_{x1} y τ_{x1y1} que actúan en planos ortogonales al plano xy.



Ahora veremos como se localizan en la circunferencia de Mohr diversos puntos de particular interés.

- ***Esfuerzos Principales***

Los esfuerzos principales σ_1^* y σ_2^* se localizan en los puntos P_1 y P_2 en el diagrama de Mohr. En efecto, de la geometría de la Fig. 1.41 y por comparación con la Ec. (1.70) se tiene

$$\begin{aligned} \overline{OP_1} &= \overline{OC} + \overline{CP_1} = OC + R \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sigma_1^* \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \overline{OP_2} &= \overline{OC} - \overline{CP_2} = OC - R \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \sigma_2^* \end{aligned}$$

- ***Componentes de la Matriz de Esfuerzos***

Los esfuerzos σ_x y τ_{xy} que actúan sobre el plano perpendicular al eje x son las coordenadas de un punto $P_x(\sigma_x, \tau_{xy})$ en la circunferencia de Mohr localizado en el extremo del radio $\overline{CP_x}$ (ver Fig. 1.42). Este radio se encuentra a un ángulo $2\theta_1$ con respecto al radio $\overline{CP_1}$, siendo θ_1 el ángulo que define a una de las direcciones principales según la Ec. (1.66).

En efecto, de la geometría de la Fig. 1.42 se tiene

$$tan\ 2\theta_1 = \frac{\overline{P_x P_x'}}{\overline{CP_x'}} = \frac{\overline{P_x P_x'}}{\overline{OP_x'} - \overline{OC}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Al comparar esta expresión con la Ec. (1.66), se comprueba que el punto $P_x(\sigma_x, \tau_{xy})$ se encuentra en el extremo del radio CP_x, ubicado a un ángulo $2\theta_1$ con respecto al radio $\overline{CP_1}$, cuyo punto extremo define la localización del esfuerzo principal σ_1^*.

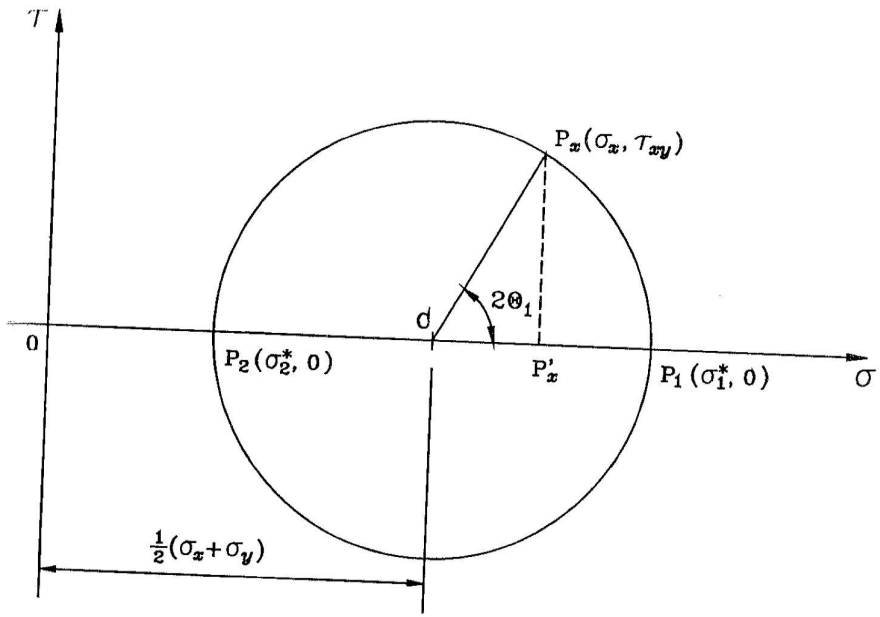


Figura 1.42 Localización del punto P_x (σ_x, τ_{xy}) en el diagrama de Mohr

De una manera similar puede demostrarse que los esfuerzos σ_y y $-\tau_{xy}$ son las coordenadas del punto $P_y(\sigma_y, -\tau_{xy})$ en el diagrama de Mohr[21], ubicado en el extremo del radio $\overline{CP_y}$, diametralmente opuesto al punto $P_x(\sigma_x, \tau_{xy})$. En efecto, de la geometría de la Fig. 1.43 tenemos que

$$tan(\angle P_y C P_y') = \frac{\overline{P_y P_{y'}}}{\overline{CP_y'}} = \frac{\overline{P_y P_y'}}{\overline{OC} - \overline{OP_y'}} = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sigma_y} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = tan 2\theta_1$$

Esta expresión comprueba que, efectivamente, $P_x(\sigma_x, \tau_{xy})$ y $P_y(\sigma_y, -\tau_{xy})$ son puntos diametralmente opuestos en la circunferencia de Mohr, de donde naturalmente se infiere que el ángulo entre los radios $\overline{CP_x}$ y $\overline{CP_y}$ es 180°.

[21] Recuérdese que en el diagrama de Mohr se están representando los esfuerzos en el sistema de coordenadas x_1y_1. Por lo tanto, el esfuerzo de corte τ_{xy} sobre el plano cuya normal es el eje y se corresponde con el esfuerzo de corte en el plano de normal $x1$ para una rotación $\theta = 90°$. En este plano el esfuerzo de corte apunta en la dirección negativa del eje y_1, como se observa en la Fig. 1.37. Luego, de acuerdo con la convención de signos adoptada, este esfuerzo de corte es negativo cuando se refiere al sistema de coordenadas x_1y_1.

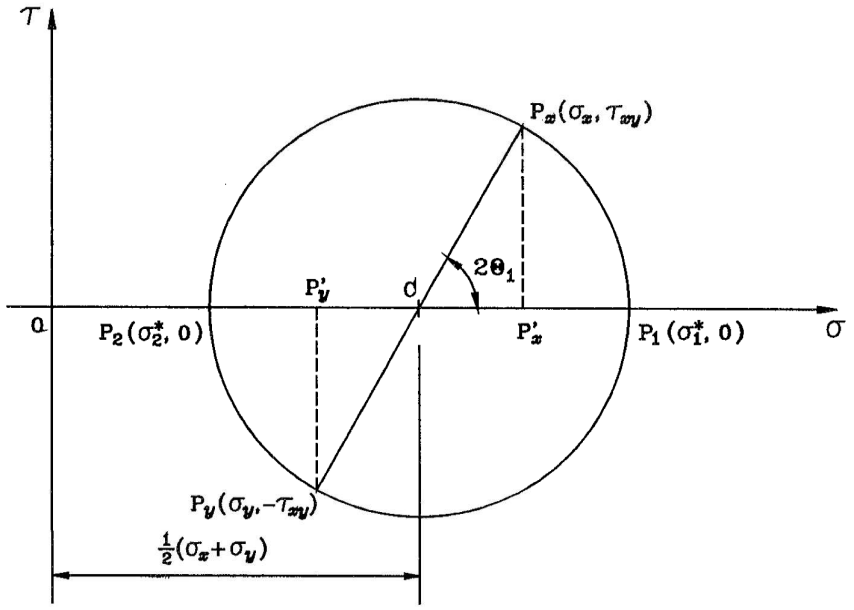


Figura 1.43 Localización del punto P_y (σ_y, $-\tau_{xy}$) en el diagrama de Mohr

- ***Esfuerzos en un Plano Genérico***

Los esfuerzos σ_{x1} y τ_{x1y1} que actúan en un plano cuya normal forma un ángulo θ en sentido antihorario con el eje x son las coordenadas de un punto $P_{x1}(\sigma_{x1}, \tau_{x1y1})$ en la circunferencia de Mohr ubicado en el extremo del radio $\overline{CP_{x1}}$, el cual se encuentra a un ángulo 2θ en sentido horario con respecto al radio $\overline{CP_x}$ (ver Fig. 1.44).

En efecto, la abscisa del punto P_{x1} puede expresarse como

$$\overline{OP'_{x1}} = \overline{OC} + \overline{CP_{x1}}\cos(2\theta_1 - 2\theta) = \overline{OC} + R\cos(2\theta_1 - 2\theta)$$
$$= \overline{OC} + (R\cos 2\theta_1)\cos 2\theta + (R\,\text{sen}\,2\theta_1)\,\text{sen}\,2\theta$$

De las Ecs. (1.67) y (1.73) se tiene que

$$R\,\text{sen}\,2\theta_1 = \tau_{xy}, \qquad R\cos 2\theta_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$$

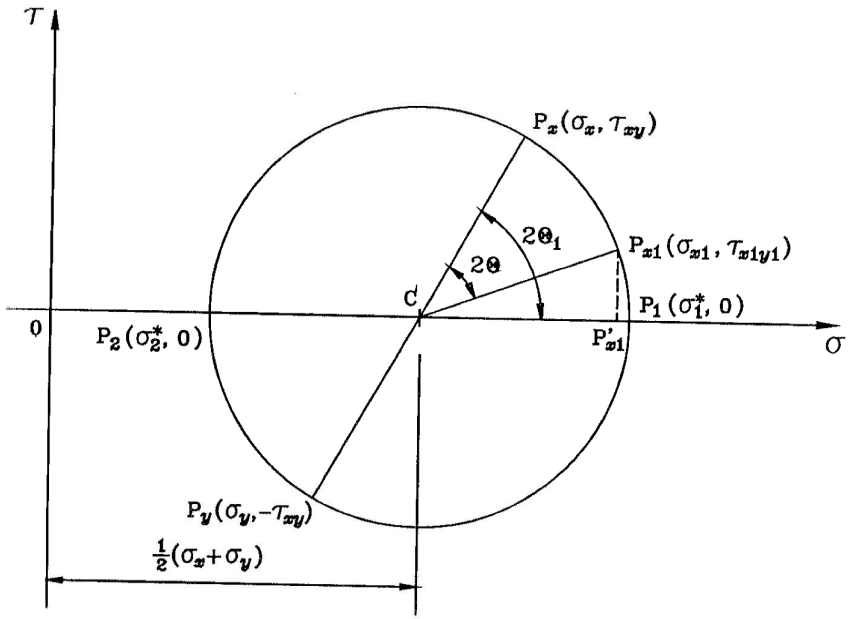


Figura 1.44 Localización del punto P_{x1} (σ_{x1}, $-\tau_{x1y1}$) en el diagrama de Mohr

Luego, usando (1.72) y comparando con la primera de las Ecs. (1.65) se concluye que

$$\overline{OP'_{x1}} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta = \sigma_{x1}$$

Análogamente, la ordenada del punto P_{x1} en la Fig. 1.44 puede expresarse como

$$\overline{P'_{x1}P_{x1}} = \overline{CP_{x1}}\,\text{sen}\,(2\theta_1 - 2\theta) = R\,\text{sen}\,(2\theta_1 - 2\theta)$$
$$= (R\,\text{sen}\,2\theta_1)\cos 2\theta - (R\cos 2\theta_1)\,\text{sen}\,2\theta$$
$$= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = \tau_{x1y1}$$

Hemos completado así la demostración del siguiente método gráfico para determinar los esfuerzos principales y las componentes normal y tangencial del esfuerzo en plano cuya normal forma un ángulo θ en sentido antihorario con el eje x:

Método Gráfico

- Considérese un sistema de coordenadas $\{\sigma, \tau\}$ como el mostrado en la Fig. 1.44. En el eje de las abscisas se representan los valores de los esfuerzos normales σ, mientras que en el eje de las ordenadas se representan los esfuerzos tangenciales τ.

- Sobre este diagrama se ubican los puntos $P_x(\sigma_x, \tau_{xy})$ y $P_y(\sigma_y, -\tau_{xy})$, entre los cuales se traza el segmento de recta P_xP_y. Este segmento intersecta al eje de las abscisas en el punto $C[\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), 0]$, el cual corresponde al centro de la circunferencia P_1P_2.

- Con centro en el punto C y radio $\overline{CP_x} = \overline{CP_y}$ trazamos la circunferencia P_1P_2. Los puntos de intersección P_1 y P_2 de esta circunferencia con el eje de las abscisas son, respectivamente, los esfuerzos principales σ_1^* y σ_2^* en el plano xy.

- El ángulo que forma el esfuerzo principal σ_1^* con el eje x es igual y de sentido contrario a la mitad del ángulo entre los radios $\overline{CP_1}$ y $\overline{CP_x}$.

- Para determinar los esfuerzos σ_{x1} y τ_{x1y1} que actúan en un plano cuya normal forma un ángulo θ *en sentido antihorario* con el eje x, medimos un ángulo 2θ *en sentido horario* a partir del radio $\overline{CP_x}$ en el diagrama de Mohr. Este ángulo 2θ define el radio $\overline{CP_{x1}}$, siendo P_{x1} el punto de coordenadas $(\sigma_{x1}, \tau_{x1y1})$.

Nótese que el método descrito es totalmente gráfico, en el sentido de que no se requiere efectuar ningún tipo de cálculo para la obtención de las variables deseadas.

En general, se tiene la siguiente regla de correspondencia entre el plano xy y el diagrama de Mohr:

Regla de Correspondencia

- Los esfuerzos normal y tangencial en un plano perpendicular al plano xy son las coordenadas de un punto en la circunferencia de Mohr.

- Los ejes en el plano xy se representan como radios en la circunferencia de Mohr.

- En el plano xy los ángulos se consideran positivos cuando se miden en sentido antihorario, mientras que en el diagrama de Mohr los ángulos son positivos cuando se miden en sentido horario.

- Si un eje x_1 forma un ángulo θ con otro eje x_2 en el plano xy, entonces el radio $\overline{CP_{x1}}$ forma un ángulo -2θ con el radio $\overline{CP_{x2}}$ en el diagrama de Mohr.

Ejemplo 1.10

Para el estado de esfuerzos definido por

$$\sigma_x = 5 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_y = -3 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{xy} = -6 \text{ kgf/mm}^2$$

a) Determinar gráfica y analíticamente los esfuerzos normal y tangencial en un plano cuya normal forma un ángulo de 30° en sentido antihorario con el eje x.

b) Determinar gráfica y analíticamente los esfuerzos principales, en magnitud y dirección.

Solución: En primer lugar se procederá a la construcción del diagrama de Mohr, tal como se describe a continuación:

i) Trazamos un sistema de coordenadas $\{\sigma, \tau\}$ y en él ubicamos el punto

$$P_x(\sigma_x, \tau_{xy}) = (5, -6)$$

como se observa en la Fig. 1.45.

ii) De una manera similar, ubicamos el punto

$$P_y(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (-3, 6)$$

iii) Unimos los puntos P_x y P_y mediante el segmento de recta $\overline{P_xP_y}$. Este segmento intersecta al eje de las abscisas en el punto

$$C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) = (1, 0)$$

que es el centro de la circunferencia de Mohr. Con centro en este punto y radio $\overline{CP_x}$ ($\overline{CP_y}$) trazamos dicha circunferencia (Fig. 1.45).

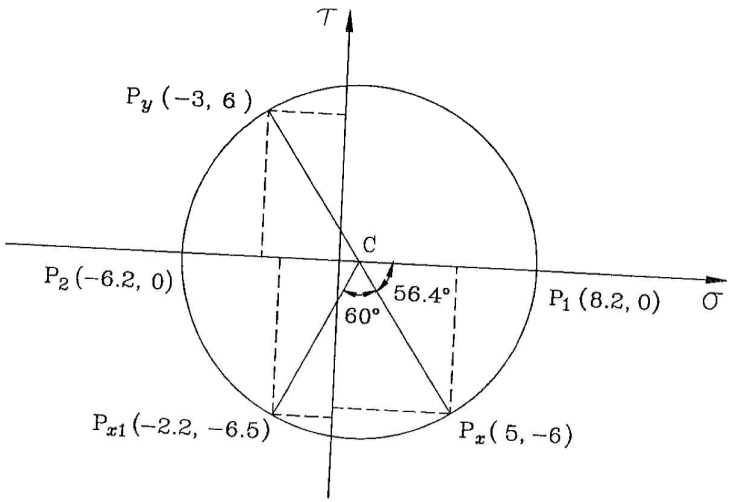


Figura 1.45 Diagrama de Mohr para el ejemplo 1.10

Ahora pasamos a la determinación de las diversas variables:

a) Para evaluar las componentes normal y tangencial en el plano cuya normal forma un ángulo de 30° en sentido antihorario con el eje x, medimos a partir del radio $\overline{CP_x}$ un ángulo de 2×30° = 60° en sentido horario. Trazamos entonces el radio $\overline{CP_{x1}}$ y ubicamos el punto P_{x1} cuyas coordenadas son los esfuerzos buscados:

$$P_{x1}(\sigma_{x1}, \tau_{x1y1}) = (-2.2, -6.5) \text{ kgf/mm}^2$$

En forma analítica, usando las ecuaciones de transformación (1.65), tenemos

$$\sigma_{x1} = \frac{1}{2}(5-3) + \frac{1}{2}(5+3)\cos 60° - 6\,\text{sen}\,60° = -2.2 \text{ kgf/mm}^2$$

$$\tau_{x1y1} = -\frac{1}{2}(5+3)\,\text{sen}\,60° - 6\cos 60° = -6.5 \text{ kgf/mm}^2$$

b) Los esfuerzos principales son los puntos de intersección de la circunferencia de Mohr con el eje σ. En la Fig. 1.45 se observa que $\sigma_1^* = 8.2$ kgf/mm^2 y $\sigma_2^* = -6.2$ kgf/mm^2. Luego tenemos que

$$\sigma_3 = 8.2 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_2 = 0 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_1 = -6.2 \text{ kgf/mm}^2$$

En el diagrama de Mohr se observa que el radio CP_1 forma un ángulo de 56.4° en sentido antihorario con el radio CP_x. Entonces el esfuerzo principal σ_1^* forma un ángulo de 56.4°/2 = 28.2° en sentido horario con el eje x. El resto de las direcciones principales puede determinarse por condiciones de ortogonalidad. En la Fig. 1.46 se muestran estas direcciones.

Analíticamente, usando las Ec. (1.70), tenemos

$$\sigma_{1,2}^* = \frac{1}{2}(5-3) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(5+3)^2 + (-6)^2} = 1 \pm 7.2 \text{ kgf/mm}^2$$

Es decir, $\sigma_1^* = 8.2$ kgf/mm^2 y $\sigma_2^* = -6.2$ kgf/mm^2.

El ángulo que forma el esfuerzo principal σ_1^* con el eje x es

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{2(-6)}{5+3} = \frac{1}{2}\text{arctg}(-1.5) = -28.2°$$

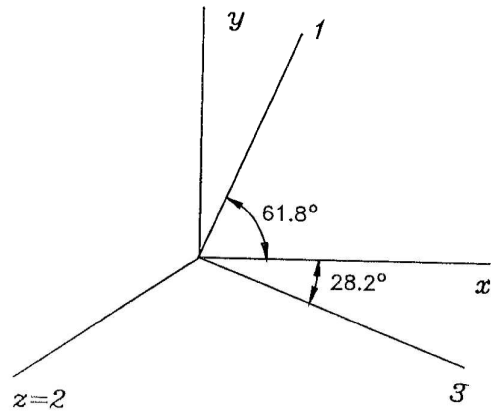


Figura 1.46 Ejes principales en el ejemplo 1.10

Ejemplo 1.11

Un estado de esfuerzos está definido por

$$\sigma_x = 10 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_y = 2 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{xy} = 3 \text{ kgf/mm}^2$$

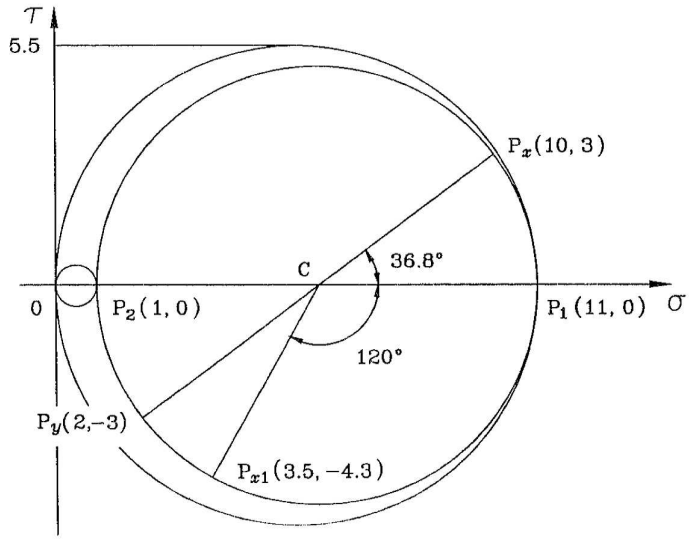
Determinar gráficamente:

a) Los esfuerzos principales.
b) Los esfuerzos normal y tangencial en un plano cuya normal forma un ángulo de 60° en sentido antihorario con respecto al esfuerzo principal máximo. Verificar analíticamente los resultados obtenidos
c) El esfuerzo de corte máximo

Solución: El diagrama de Mohr se muestra en la Fig. 1.47.

a) Los esfuerzos principales son

$$\sigma_3 = \sigma_1^* = 11 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_2 = \sigma_2^* = 1 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_1 = 0 \text{ kgf/mm}^2$$



El eje principal *3* forma un ángulo de 18.4° en sentido antihorario con respecto al eje x. La dirección principal *2* se obtiene por ortogonalidad. Estos resultados se observan en la Fig. 1.48.

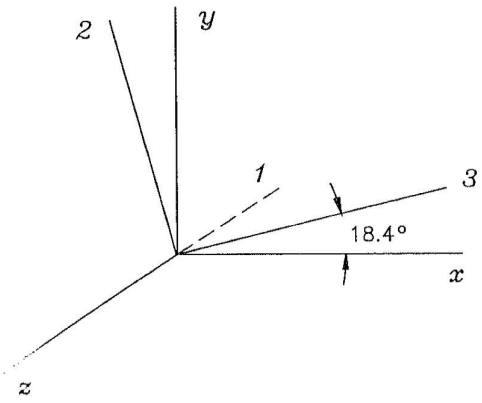


Figura 1.48 Ejes principales del ejemplo 1.11

b) Medimos un ángulo de 2×60° = 120° en sentido horario a partir del radio CP_1 para ubicar el punto P_{x1} cuyas coordenadas son los esfuerzos buscados (Fig. 1.47):

$$\sigma_{x1} = 3.5 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{x1y1} = -4.3 \text{ kgf/mm}^2$$

Para resolver analíticamente este problema, podemos usar las ecuaciones de transformación (1.65) referidas al sistema principal de coordenadas. Entonces tendríamos

$$\sigma_{x1} = \frac{1}{2}(\sigma_1^* + \sigma_2^*) + \frac{1}{2}(\sigma_1^* - \sigma_2^*)\cos 2\theta$$
$$\tau_{x1y1} = -\frac{1}{2}(\sigma_1^* - \sigma_2^*)\operatorname{sen} 2\theta$$

donde θ sería ahora el ángulo que forma el eje x_1 con el esfuerzo principal σ_1^*. En nuestro caso concreto estos esfuerzos valen

$$\sigma_{x1} = \frac{1}{2}(11+1) + \frac{1}{2}(11-1)\cos 120° = 3.5 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{x1y1} = \frac{1}{2}(11-1)\operatorname{sen} 120° = -4.3 \text{ kgf/mm}^2$$

c) El radio de la circunferencia P_1P_2 es el máximo esfuerzo de corte que puede existir en planos perpendiculares al plano xy. Sin embargo, el esfuerzo de corte máximo absoluto actúa en otro plano. Para determinarlo trazamos las circunferencias OP_1 y OP_2, recordando que $\sigma_1 = 0$ (Fig. 1.47). El radio de la circunferencia OP_1, tal como se explicó en la Sec. 1.8, es el esfuerzo de corte máximo:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = 5.5 \text{ kgf/mm}^2$$

Ejemplo 1.12

Los esfuerzos en dos planos a 45° que pasan por un mismo punto de un elemento de máquina son los indicados en la Fig. 1.49. Sabiendo que se trata de un estado plano de esfuerzos y que el esfuerzo principal nulo es perpendicular al plano del dibujo,

a) Determinar, gráfica y analíticamente, los esfuerzos principales en magnitud y dirección.

b) Determinar la magnitud del esfuerzo de corte máximo y la orientación del plano donde actúa.

d) Calcular el esfuerzo cortante octaedral.

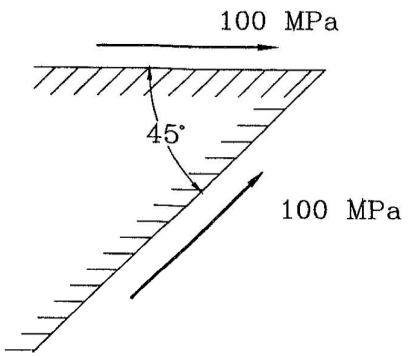


Figura 1.49 Esfuerzos en dos planos a 45° (ejemplo 1.12)

Solución: Para resolver este problema podemos utilizar un sistema de coordenadas x_1y_1 cuyo eje x_1 forma un ángulo genérico 0 con la horizontal, tal como se muestra en la Fig. 1.50. Este eje x_1 servirá para definir la normal a cada uno de los planos.

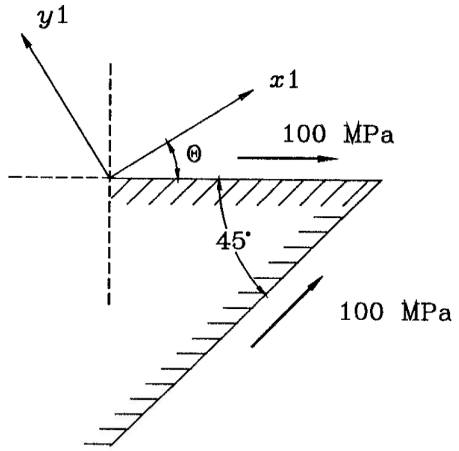


Figura 1.50 Sistema genérico de coordenadas para el ejemplo 1.12

Para el plano horizontal $\theta = 90°$ y los esfuerzos serían

$$\sigma_{x1} = 0, \quad \tau_{x1y1} = -100 \text{ MPa}$$

El plano oblicuo, por otra parte, queda definido por un ángulo $\theta = -45°$ y los esfuerzos en él serían

$$\sigma_{x1} = 0, \quad \tau_{x1y1} = 100 \text{ MPa}$$

Estos esfuerzos corresponden, respectivamente, a las coordenadas de los puntos H (plano horizontal) y O (plano oblicuo) en el diagrama de Mohr, Fig. 1.51.

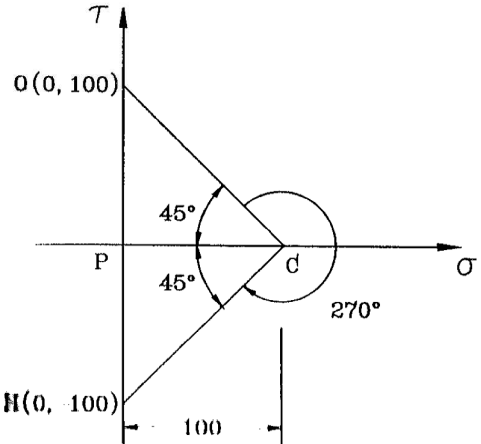


Figura 1.51 Ubicación del centro de la circunferencia de Mohr en el ejemplo 1.12

Para determinar el centro C de la circunferencia de Mohr a la cual pertenecen estos dos puntos, utilizamos el siguiente razonamiento, basado en la regla de correspondencia presentada anteriormente: El radio $\overline{CH}$ corresponde a la normal al plano horizontal, mientras que el radio $\overline{CO}$ corresponde a la normal al plano oblicuo. La normal al plano horizontal forma un ángulo de *135° en sentido antihorario* con la normal al plano oblicuo; entonces, en el diagrama de Mohr, el radio $\overline{CH}$ debe formar un ángulo de 2x135° = 270° *en sentido horario* con el radio $\overline{CO}$. De aquí se concluye que el centro C de la circunferencia debe estar ubicado a la derecha del segmento vertical $\overline{OH}$, a una distancia $\overline{PC}$ tal que los radios $\overline{CO}$ y $\overline{CH}$ formen cada uno un ángulo de 45° con el eje horizontal (ver Fig. 1.51). Al cumplir esta condición, se obtienen dos triángulos isósceles *CPO* y *CPH*, de donde se concluye que $\overline{PC}$ 100MPa. Con centro en C y radio $\overline{CO} = \overline{CH}$ trazamos la circunferencia de Mohr, como se muestra en la Fig. 1.52.

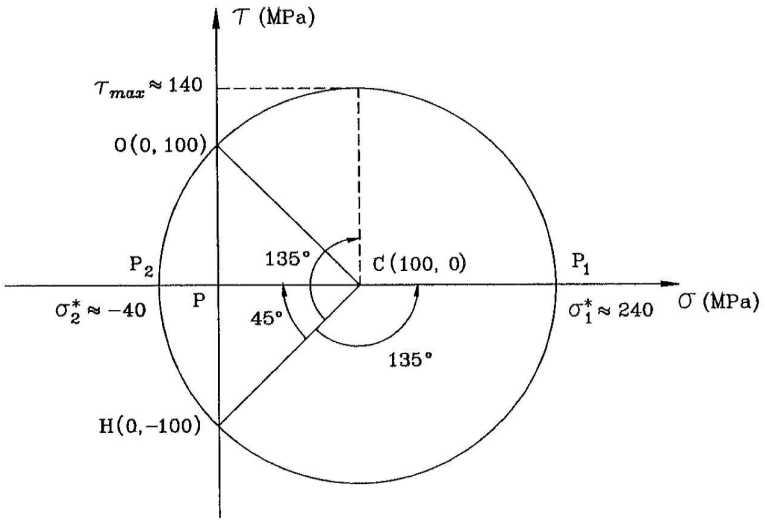


Figura 1.52 Diagrama de Mohr para el ejemplo 1.12

a) Los puntos de intersección de esta circunferencia con el eje de las abscisas nos dan los esfuerzos principales aproximados $\sigma_1^* \approx 240$ MPa y $\sigma_2^* \approx -40$ MPa. En el diagrama de Mohr se observa que el radio CP_1 forma

un ángulo de 135° en sentido antihorario con el radio $\overline{CH}$; luego el esfuerzo principal σ_1^* forma un ángulo de 135°/2 = 67.5° en sentido horario con la normal al plano horizontal (Fig. 1.53). Análogamente, el radio $\overline{CP_2}$ forma un ángulo de 45° en sentido horario con el radio $\overline{CH}$; luego el esfuerzo principal σ_2^* forma un ángulo de 45°/2 = 22.5° en sentido antihorario con la normal al plano horizontal (Fig. 1.53).

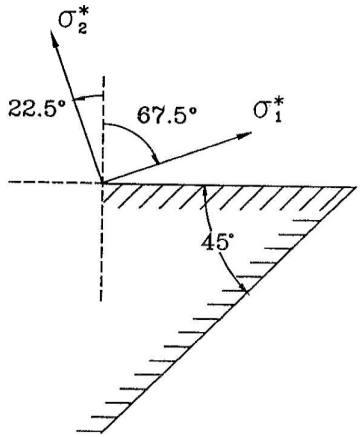


Figura 1.53 Esfuerzos principales del ejemplo 1.12

Para resolver analíticamente este problema, usamos un sistema de coordenadas xy, donde, como siempre, el eje x es horizontal y el eje y es vertical. Entonces, de la información conocida para el plano horizontal (Fig. 1.49) se tiene que

$$\sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 100 \text{ MPa}$$

Para el plano oblicuo se sabe que

$$\sigma_{x1} = 0, \qquad \tau_{x1y1} = 100 \text{ MPa}$$

donde se ha utilizado un sistema de coordenadas x_1y_1 cuyo eje x_1 forma un ángulo de 45° en sentido horario con el eje horizontal.

Usando ahora la primera de las ecuaciones de transformación (1.65) tenemos

$$\sigma_{x1} = \frac{1}{2}(\sigma_x + 0) + \frac{1}{2}(\sigma_x - 0)\cos(-90°) + 100\,\text{sen}\,(-90°) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_x = 200 \text{ MPa}$$

Este mismo resultado se obtiene si se utiliza la segunda de las ecuaciones de transformación (se sugiere que el lector lo verifique).

Entonces, usando las Ecs. (1.70) tenemos que los esfuerzos principales son

$$\sigma^*_{1,2} = \frac{1}{2}(200 + 0) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(200 - 0)^2 + (100)^2} = 100 \pm 100\sqrt{2} \text{ MPa}$$

Es decir, $\sigma^*_1 = 100(1 + \sqrt{2}) = 241.4$ MPa y $\sigma^*_2 = 100(1 - \sqrt{2}) = -41.4$ MPa.

Para obtener el ángulo que forma el esfuerzo principal σ^*_1 con la horizontal (eje x) utilizamos la Ec. (1.66)

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{2 \times 100}{200 - 0} = \frac{1}{2}\text{arctg}\,(1.0) = 22.5°$$

b) En este ejemplo el esfuerzo de corte máximo es el radio de la circunferencia definida por σ^*_1 y σ^*_2. Su valor es

$$\tau_{máx} = \frac{241.4 - (-41.4)}{2} = 141.4 \text{ MPa}$$

En el diagrama de Mohr, el radio que define el punto donde el esfuerzo de corte es máximo forma un ángulo de 135° en sentido horario con el radio CI. Luego, la normal al plano donde el esfuerzo de corte es máximo forma un ángulo de 135°/2 = 67.5° en sentido antihorario con la normal al plano horizontal (Fig. 1.54).

c) Considerando los esfuerzos principales en tres dimensiones, se tiene

$$\sigma_3 = \sigma^*_1 = 241.4 \text{ MPa}$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_1 = \sigma^*_2 = -41.4 \text{ MPa}$$

Luego, utilizando la Ec. (1.54), el esfuerzo de corte octaedral será

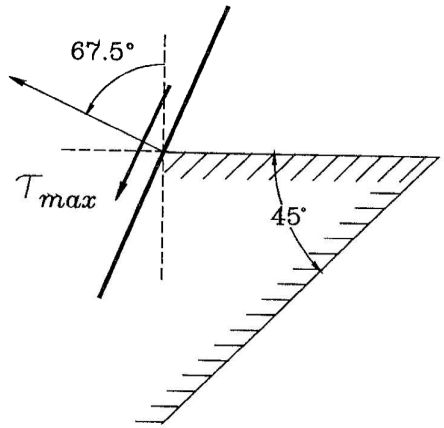


Figura 1.54 Esfuerzo de corte máximo en el ejemplo 1.12

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(241.4 + 41.4)^2 + (241.4 - 0)^2 + (0 + 41.4)^2} = 124.7 \text{ MPa}$$

1.13 Estado Cuasiplano de Esfuerzos

En muchas situaciones se presenta un estado de esfuerzos que, sin ser plano, puede ser tratado como tal. En efecto, supongamos un estado de esfuerzos definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{1.74}$$

Este estado de esfuerzos es muy similar a un estado plano, en el sentido de que el eje z es una dirección principal conocida a-priori; la diferencia consiste en que el esfuerzo principal σ_z en la dirección principal conocida no es cero.

Como en el caso de un estado plano de esfuerzos, se sabe que las dos direcciones principales no conocidas deben estar contenidas en un plano paralelo al plano xy. Entonces, aplicamos la fórmula de Cauchy y calculamos el

vector esfuerzo en un plano perpendicular al plano xy, cuya normal x_1 forme un ángulo θ con el eje x, Fig. 1.35. El resultado es el siguiente

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este vector es idéntico al obtenido para un estado plano de esfuerzos, está contenido en un plano paralelo al plano xy y no depende del esfuerzo principal conocido σ_z. Esto significa que las direcciones x y y están desacopladas de la dirección z; es decir, los esfuerzos en planos ortogonales al plano xy no dependen de los esfuerzos en el plano perpendicular al eje z. Entonces, para evaluar las componentes normal y tangencial, así como los esfuerzos principales en el plano xy, se pueden utilizar las mismas ecuaciones que se dedujeron en la Sec. 1.11. Es más, toda la metodología gráfica estudiada para un estado plano de esfuerzos es también aplicable a este caso. Lo único que hay que tener presente es que, al hacer la asignación de los esfuerzos principales al caso tridimensional, debe tomarse en cuenta que $\sigma_z \neq 0$.

A un estado de esfuerzos definido por una matriz similar a la (1.74), caracterizada por el hecho de que uno de los ejes coordenados es principal, se le da con frecuencia el nombre de *estado cuasiplano de esfuerzos*.

Ejemplo 1.13

El estado de esfuerzos en un punto está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ kgf/mm}^2$$

Determinar, gráfica y analíticamente:

a) Los esfuerzos principales, en magnitud y dirección.
b) El esfuerzo de corte máximo
c) Los esfuerzos normal y tangencial en un plano cuya normal forma con los ejes principales 1,2 y 3 ángulos de:
   i) 30°, 60° y 90°
   ii) 60°, 60° y 45°

Solución: a) En primer lugar se procederá a la construcción del diagrama de Mohr, tal como se describe a continuación:

a.1) Trazamos un sistema de coordenadas $\{\sigma, \tau\}$ y en él ubicamos el punto

$$P_x(\sigma_x, \tau_{xy}) = (8, 5)$$

como se observa en la Fig. 1.55.

a.2) De una manera similar, ubicamos el punto

$$P_y(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (-3, -5)$$

a.3) Unimos los puntos P_x y P_y mediante el segmento de recta $\overline{P_x P_y}$. Este segmento intersecta al eje de las abscisas en el punto

$$C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) = (2.5, 0)$$

que es el centro de una de las circunferencia de Mohr.

a.4) Trazando la circunferencia con centro en el punto C y radio $\overline{CP_x} = \overline{CP_y}$ observamos que ésta intersecta al eje de las abscisas en $\sigma = -4.9$ kgf/mm^2 y $\sigma = 9.9$ kgf/mm^2 (Fig. 1.55). Por supuesto, estos son dos de los esfuerzos principales; ahora bien, como el tercer esfuerzo principal es conocido ($\sigma_z = 2$ kgf/mm^2) y cae dentro de la circunferencia trazada, se concluye que

$$\sigma_3 = 9.9 \text{ kgf/mm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 2 \text{ kgf/mm}^2$$

$$\sigma_1 = -4.9 \text{ kgf/mm}^2$$

Analíticamente, tenemos:

$$\sigma^*_{1,2} = \frac{1}{2}(8-3) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(8+3)^2 + (5)^2} = 2.5 \pm 7.4 \text{ kgf/mm}^2$$

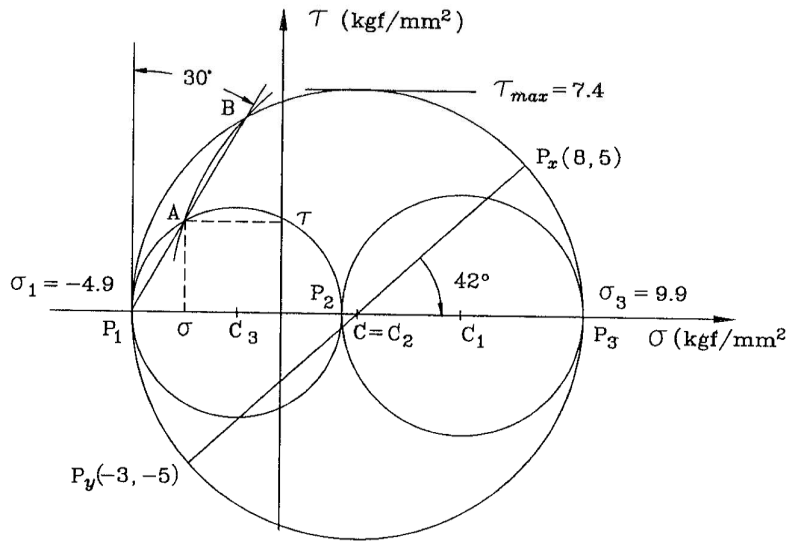


Figura 1.55 Diagrama de Mohr para el ejemplo 1.13

Es decir, $\sigma_1^* = 9.9$ kgf/mm^2 y $\sigma_2^* = -4.9$ kgf/mm^2

Para evaluar gráficamente las direcciones principales observamos lo siguiente: En el diagrama de Mohr (Fig. 1.52) medimos un ángulo de 42° en sentido horario desde radio $\overline{CP_x}$ al radio $\overline{CP_3}$. Luego, el eje principal *3* forma un ángulo de 21° en sentido antihorario con respecto al eje *x*. Teniendo presente que los ejes *1*, *2* y *3* son mutuamente perpendiculares, obtenemos las otras direcciones principales (Fig. 1.56).

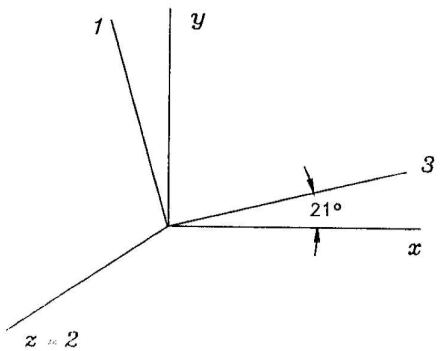


Figura 1.56 Direcciones principales en el ejemplo 1.13

Analíticamente, tenemos que

$$\theta_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{2\times 5}{8+3} = \frac{1}{2}\text{arctg}\,(0.909) = 21.1°$$

De donde se tiene que $\beta_3 = 90 - \alpha_3 = 68.9°$ y $\gamma_3 = 90°$.

b) El esfuerzo de corte máximo es el radio de la circunferencia P_1P_3 en la Fig. 1.55. Analíticamente, se tiene

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{9.9-(-4.9)}{2} = 7.4 \text{ kgf/mm}^2$$

c) El plano descrito en la parte (i) es uno cuya normal es perpendicular al eje *3*; luego, los esfuerzos en ese plano son las coordenadas de un punto en la circunferencia P_1P_2. Trazamos entonces por el punto P_1 una recta inclinada en un ángulo de 30° con respecto a la vertical. Esta recta intersecta a las circunferencias P_1P_2 y P_1P_3 en los puntos *A* y *B* (Fig. 1.55). Con centro en C_1 trazamos el arco *AB*. Como el punto buscado debe pertenecer simultáneamente al arco *AB* y a la circunferencia P_1P_2, se concluye que el referido punto es el *A*. Las coordenadas de este punto son $\sigma = -3.2$ kgf/mm^2 y $\tau = 3.0$ kgf/mm^2.

Para calcular analíticamente estos esfuerzos usamos las Ecs. (1.35), (1.36) y (1.37):

$$\sigma = -4.9\cos^2 30° + 2\cos^2 60° + 9.9\cos^2 90° = -3.2 \text{ kgf/mm}^2$$

$$T = \sqrt{(-4.9\cos 30°)^2 + (2\cos 60°)^2 + (9.9\cos 90°)^2} = 4.4 \text{ kgf/mm}^2$$

$$\tau = \sqrt{(4.4)^2 - (3.2)^2} = 3.0 \text{ kgf/mm}^2$$

Para el plano descrito en la parte (ii) procedemos de una manera similar. La solución gráfica se muestra en la Fig. 1.57.

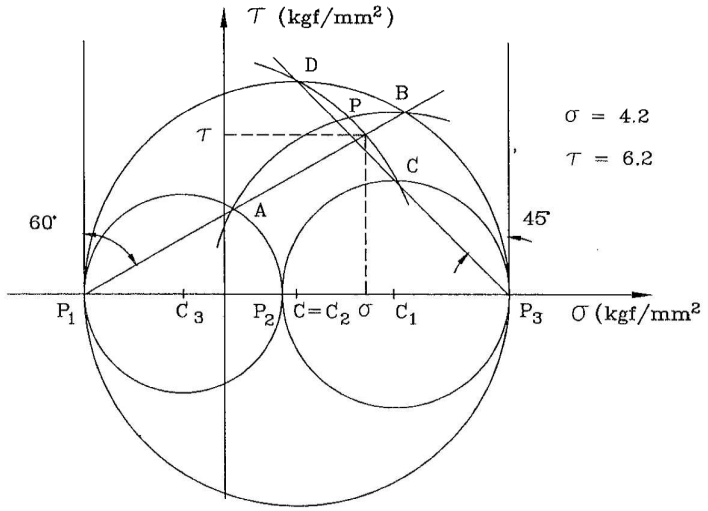


Figura 1.57 Diagrama de Mohr para ubicar un segundo punto en el ej. 1.13.

1.14 Ecuaciones de Equilibrio

En la Sec. 1.3 quedó bien establecido que el vector esfuerzo **T** depende del vector de posición **r** y del vector unitario **n** que define la orientación del plano al cual pertenece el punto en estudio. Esta dependencia fue expresada de manera explícita al escribir $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$.

Hasta ahora, sin embargo, hemos restringido nuestro estudio al análisis de los esfuerzos en un punto específico de vector de posición **r**, perspectiva desde la cual se ha investigado como varía el vector esfuerzo **T** en función del vector normal **n**. Este estudio nos condujo, en resumidas cuentas, a la definición de la matriz de esfuerzos σ y al análisis de la variación de sus componentes cuando el sistema de coordenadas es transformado mediante una rotación de ejes. De esta manera fue posible establecer una metodología para determinar los valores extremos de las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en un punto dado para el cual se conoce la matriz de esfuerzos, valores éstos que, como veremos en el Cap. 4, resultarán indispensables para predecir la resistencia del material en aquellos puntos del sólido que se consideren más críticos.

Todo el estudio realizado hasta ahora se basa entonces en la premisa de que la matriz de esfuerzos es conocida para cada punto $P(x, y, z)$ del sólido. Sin embargo, este es justamente el problema fundamental del análisis de esfuerzos, el cual consiste en determinar la distribución de esfuerzos en un sólido en términos de las cargas aplicadas, de la geometría del cuerpo y de las propiedades mecánicas del material. A los efectos de resolver este problema fundamental deberíamos comenzar por examinar cómo varía el vector esfuerzo **T** con el vector de posición **r** manteniendo fija la normal **n**. Ahora bien, dado que el Teorema de Cauchy nos demuestra que las variables **r** y **n** están separadas, será suficiente con estudiar la variación de la matriz de esfuerzos σ con el vector de posición **r**.

Sea entonces Ω la región ocupada por un sólido cuya frontera es la superficie Γ. Sea V una porción de volumen *cualquiera* del sólido cuya frontera es la superficie cerrada A, como se muestra en la Fig. 1.58.

Haciendo un diagrama de cuerpo libre de esta porción de volumen, observamos que sobre cada punto de su superficie A actúa la fuerza infinitesimal $\mathbf{T}dA$, mientras que en cada punto interior actúa la fuerza de volumen infinitesimal $\mathbf{f}dV$.

El equilibrio de fuerzas requiere que

$$\int_A \mathbf{T}\,dA + \int_V \mathbf{f}\,dV = \mathbf{0} \tag{1.75}$$

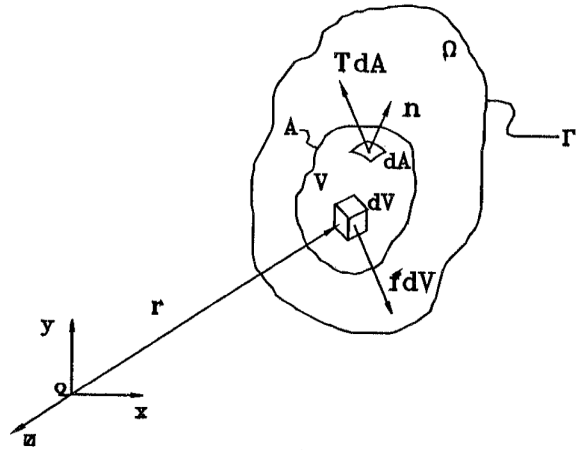


Figura 1.58 Fuerzas de volumen y de superficie sobre una porción V del volumen del sólido.

mientras que por equilibrio de momentos se obtiene

$$\int_A \mathbf{r}\times\mathbf{T}dA+\int_V \mathbf{r}\times\mathbf{f}dV=\mathbf{0} \tag{1.76}$$

Las Ecs. (1.75) y (1.76) son las llamadas ecuaciones de equilibrio en su *forma integral*. Debido a su gran utilidad, vamos a expresar estas ecuaciones en su *forma diferencial*.

Proyectando la Ec. (1.75) en la dirección del eje x, tenemos

$$\int_A T_x\,dA+\int_V f_x\,dV=0$$

Usando las Ecs. (1.15) en su forma primitiva, esto es, sin aprovechar la simetría de la matriz de esfuerzos[22], obtenemos

$$\int_A(\sigma_x\cos\alpha+\tau_{yx}\cos\beta+\tau_{zx}\cos\gamma)\,dA+\int_V f_x\,dV=0$$

$$\int_A(\sigma_x\mathbf{i}+\tau_{yx}\mathbf{j}+\tau_{zx}\mathbf{k})\circ(\cos\alpha\,\mathbf{i}+\cos\beta\,\mathbf{j}+\cos\gamma\,\mathbf{k})\,dA+\int_V f_x\,dV=0$$

Es decir

$$\int_A(\sigma_x\mathbf{i}+\tau_{yx}\mathbf{j}+\tau_{zx}\mathbf{k})\circ\mathbf{n}\,dA+\int_V f_x\,dV=0$$

Aplicando el *teorema de la divergencia*[23] a la primera de las integrales y agrupando términos obtenemos

$$\int_V\left[\nabla\circ(\sigma_x\mathbf{i}+\tau_{yx}\mathbf{j}+\tau_{zx}\mathbf{k})+f_x\right]dV=0$$

[22] En esta sección no se hará uso de la simetría de la matriz de esfuerzos pues ésta será justamente una de las propiedades que serán demostradas.

[23] Consúltese, por ejemplo, el libro de F.B. Hildebrand, "*Advanced Calculus for Applications*", Prentice-Hall, New Jersey, 1976, pp. 297-301.

donde ∇ es el operador

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Luego

$$\int_V\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f_x\right)dV=0$$

Como el volumen V es arbitrario, entonces

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f_x=0 \tag{1.77a}$$

Proyectando la Ec. (1.75) en las direcciones y y z llegamos a otras dos ecuaciones de equilibrio similares

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+f_y=0 \tag{1.77b}$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+f_z=0 \tag{1.77c}$$

Proyectando ahora la Ec. (1.76) en la dirección del eje x tenemos

$$\int_A(yT_z-zT_y)\,dA+\int_V(yf_z-zf_y)\,dV=0$$

Usando las Ecs. (1.15), agrupando términos y usando de nuevo el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_A\left[y(\tau_{xz}\mathbf{i}+\tau_{yz}\mathbf{j}+\sigma_z\mathbf{k})\circ\mathbf{n}-z(\tau_{xy}\mathbf{i}+\sigma_y\mathbf{j}+\tau_{zy}\mathbf{k})\circ\mathbf{n}\right]dA+\int_V(yf_z-zf_y)\,dV=0$$

$$\int_A [(y\tau_{xz} - z\tau_{xy})\mathbf{i} + (y\tau_{yz} - z\sigma_y)\mathbf{j} + (y\sigma_z - z\tau_{zy})\mathbf{k}] \circ \mathbf{n}\, dA + \int_V (yf_z - zf_y)\, dV = 0$$

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(y\tau_{yz} - z\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial z}(y\sigma_z - z\tau_{zy}) + yf_z - zf_y\right] dV = 0$$

Como el volumen V es arbitrario, el integrando debe ser cero. Entonces, desarrollando las derivadas parciales y agrupando términos tenemos

$$y\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \tau_{yz} + y\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - z\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + y\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \tau_{zy} - z\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + yf_z - zf_y = 0$$

$$y\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z\right) - z\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y\right) + \tau_{yz} - \tau_{zy} = 0$$

Las expresiones contenidas en ambos paréntesis son cero en virtud de las Ecs. (1.77c) y (1.77b), respectivamente. Luego $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Proyectando la Ec. (1.76) en las direcciones y y z obtenemos $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ y $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, respectivamente. Se ha demostrado entonces que la matriz de esfuerzos es simétrica.

Aprovechando esta propiedad podemos finalmente escribir las ecuaciones de equilibrio (1.77) como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0
\end{aligned} \qquad (1.78)$$

Algunos comentarios importantes, a manera de resumen, son ahora pertinentes. El comportamiento mecánico del sólido, esto es, sus características de resistencia mecánica y las deformaciones que experimenta, depende esencialmente de la manera según la cual se distribuyen en el interior del cuerpo las cargas externas aplicadas.

La distribución interna de cargas viene dada por la distribución de esfuerzos. Para determinar las seis componentes de la matriz de esfuerzos

tenemos a disposición las tres ecuaciones diferenciales de equilibrio (1.78) y un conjunto de condiciones de borde obtenidas a partir de las cargas externas aplicadas al sólido en su superficie mediante la aplicación de la fórmula de Cauchy. Esto es, dadas las fuerzas de volumen $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ y las fuerzas de superficie $\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n})$, el problema consistiría en determinar la matriz de esfuerzos $\sigma \equiv \sigma(\boldsymbol{r})$.

Formalmente esta situación podría plantearse como un problema estándar con condiciones de borde en los siguientes términos:

Problema Fundamental

Sea Ω la región ocupada por un sólido cuya frontera es la superficie Γ. Sea $\mathbf{f}$ el campo vectorial de las fuerzas de volumen y sea $\mathbf{T}$ el campo vectorial de las fuerzas de superficie. Se desea encontrar la matriz de esfuerzos σ tal que

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\
\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \qquad \textit{en } \Omega \\
\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \\
\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T} \qquad \textit{sobre } \Gamma
\end{cases} \qquad (1.79)$$

Es decir, las componentes de la matriz de esfuerzos deben satisfacer en la región Ω las tres ecuaciones diferenciales de equilibrio (1.78) sujetas a las condiciones de borde $\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}$ en la frontera Γ. Estas condiciones de borde no son más que las cargas externas aplicadas al sólido.

Planteado en estos términos el problema posee infinitas soluciones y las ecuaciones de equilibrio (1.78) no son suficientes para resolverlo. En la jerga de la mecánica estructural se diría que el problema es estáticamente indeterminado. Es decir, queremos encontrar seis funciones escalares (las componentes de la matriz de esfuerzos) y únicamente tenemos a disposición tres ecuaciones diferenciales de equilibrio.

En los Capítulos 2 y 3 recurriremos a otras consideraciones adicionales a las de equilibrio para completar la formulación del problema planteado.

Problemas

1.1 El estado de esfuerzos en el punto más crítico de un sólido está definido de la manera siguiente

$$\sigma = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -4 \\ 6 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{kgf/mm}^2$$

a) Represente este estado de esfuerzos en un cubo elemental.
b) Calcule la magnitud del vector esfuerzo, así como sus componentes normal y tangencial, en un plano cuya normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados.
c) Calcule el ángulo entre el vector esfuerzo y la normal al plano referido.
d) Calcule los ángulos que forma el vector esfuerzo con los tres ejes coordenados.

1.2 Resuelva el problema 1.1 para un plano cuya normal forma ángulos de 60°, 30° y 90° con los ejes x, y y z, respectivamente.

1.3 Resuelva el problema 1.1 para un plano cuya normal forma ángulos de 66°, 78° y 26° con los ejes x, y y z, respectivamente.

1.4 El estado de esfuerzos en un punto está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \text{kgf/mm}^2$$

a) Represente este estado de esfuerzos en el tetraedro de Cauchy.
b) Calcule la magnitud del vector esfuerzo en un plano cuya normal forma ángulos de 30°, 60° y 90° con los ejes x, y y z, respectivamente. Determine los ángulos que forma el vector esfuerzo con los ejes coordenados.
c) Calcule las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo.

1.5 El estado de esfuerzos en un punto está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 3 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 12 \end{bmatrix} \text{kgf/mm}^2$$

a) Represente este estado de esfuerzos en un elemento de volumen.
b) Calcule la magnitud del vector esfuerzo en un plano cuya normal forma ángulos de 45°, 90° y 45° con los ejes x, y y z, respectivamente.
c) Calcule las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo.

1.6 Demuestre que la magnitud de la componente tangencial del vector esfuerzo $\mathbf{T}$ en un plano cuya normal es el vector unitario $\mathbf{n}$ puede expresarse como

$$\tau = |\mathbf{n} \times (\mathbf{T} \times \mathbf{n})|$$

1.7 Sean $\mathbf{n}$ y $\mathbf{m}$ las normales a dos planos que pasan por un mismo punto con vector de posición $\mathbf{r}$. Sean $\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n})$ y $\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{m})$ los vectores esfuerzo en estos dos planos.
a) Demuestre que $\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) \circ \mathbf{m} = \mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{m}) \circ \mathbf{n}$.
b) Si se aplica esta ecuación a los planos coordenados con normales $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{m} = \mathbf{j}$, ¿Qué se concluye?

1.8 En función de la posición, la matriz de esfuerzos en un sólido viene dada por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 3x & 2y & 0 \\ 2y & -z & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix}$$

Determine el vector esfuerzo, así como sus componentes normal y tangencial, en el punto $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sobre el plano $3x + 4y = 24$.

1.9 La matriz de esfuerzos en un punto viene dada por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 10 & \sigma & 10 \\ 20 & 10 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Calcule σ de tal manera que el vector esfuerzo en algún plano sea cero. Determine la normal al plano correspondiente.

1.10 El estado de esfuerzos en un punto está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 0 \\ 20 & -25 & -10 \\ 0 & -10 & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

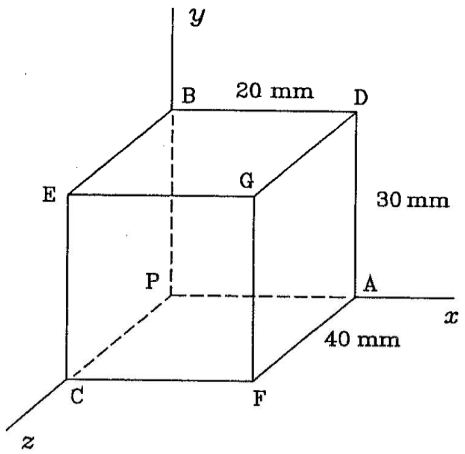


Figura P.1.10

a) Determine el vector esfuerzo en los planos *ABC* y *BCFD* de la Fig. P.1.10.
b) Determine las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en el plano *BCFD*.

1.11 En el problema 1.10, obtenga la matriz de esfuerzos en un nuevo sistema de coordenadas *x'y'z'* cuya orientación con respecto al sistema *xyz* está definida mediante una rotación de 45° en sentido positivo alrededor del eje *z*.

1.12 Sean **T(r,i)**, **T(r,j)** y **T(r,k)** los vectores esfuerzo en tres planos paralelos a los planos coordenados. Demuestre que la suma de los cuadrados de los módulos de estos vectores es independiente de la orientación del sistema de coordenadas.

1.13 Demuestre que los coeficientes I_1, I_2 e I_3 definidos por la Ec. (1.30) son invariantes.

1.14 Para el estado de esfuerzos definido en el problema 1.4, calcule los esfuerzos principales en magnitud y dirección. Represente gráficamente las direcciones principales en el sistema de referencia *xyz*.

1.15 Para el estado de esfuerzos definido en el problema 1.1, determine la magnitud de los esfuerzos principales.

1.16 Supóngase un estado de esfuerzos para el cual $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p < 0$.
a) Demuestre que la magnitud del vector esfuerzo en un plano que forma ángulos α, β y γ con los ejes principales es independiente de la orientación del plano.
b) Verifique los resultados obtenidos mediante el diagrama de Mohr y determine gráficamente las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo.

1.17 Un estado de esfuerzos está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ kgf/mm}^2$$

a) Determine analíticamente los esfuerzos principales.
b) Determine las direcciones principales.
c) Represente gráficamente los esfuerzos principales.
d) Construya el diagrama de Mohr y determine gráficamente los esfuerzos en un plano cuya normal forma, respectivamente con los ejes *1*, *2* y *3*, ángulos de:

i) 60°, 45° y 60°
ii) 30°, 90° y 60°
iii) 30°, 60° y 90°
iv) 90°, 30° y 60°

1.18 En un punto de un sólido se conocen los vectores esfuerzo

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (-31.5\,\mathbf{i} + 147.5\,\mathbf{j} + 258\,\mathbf{k})\ \text{kgf/cm}^2$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{m}) = (-118.5\,\mathbf{i} + 131\,\mathbf{j} + 219\,\mathbf{k})\ \text{kgf/cm}^2$$

en dos planos de normales

$$\mathbf{n} = 0.30\,\mathbf{i} - 0.41\,\mathbf{j} + 0.86\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{m} = -0.21\,\mathbf{i} - 0.65\,\mathbf{j} + 0.73\,\mathbf{k}$$

Sabiendo que $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$,

a) Determine la matriz de esfuerzos.
b) Calcule los esfuerzos principales.
c) ¿Es posible que exista algún plano tal que
   i) $\sigma = 40$ kgf/cm^2 y $\tau = 170$ kgf/cm^2 ?
   ii) $\sigma = -225$ kgf/cm^2 y $\tau = 175$ kgf/cm^2 ?
   En caso de ser posible, determine los ángulos que forma la normal al plano con los ejes principales y con los ejes coordenados x, y y z.

1.19 Sean $\mathbf{n} = n_x\,\mathbf{i} + n_y\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{m} = 1/5\,(3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k})$ las normales a dos planos que pasan por un mismo punto $\mathbf{r}$ de un sólido. Sean

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (22\,\mathbf{i} + 34\,\mathbf{j})\ \text{MPa}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{m}) = (-6\,\mathbf{i} + 30\,\mathbf{j} + 48\,\mathbf{k})\ \text{MPa}$$

los vectores esfuerzo en dichos planos.
Suponiendo que $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, determine

a) La matriz de esfuerzos.
b) Los esfuerzos principales.
c) Las direcciones principales

1.20 El estado de esfuerzos en un punto está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{kgf/mm}^2$$

a) Represente este estado de esfuerzos en un elemento de volumen.
b) Determine gráficamente, y verifique en forma analítica, los esfuerzos principales.

c) Determine gráficamente el esfuerzo de corte máximo y el esfuerzo cortante octaedral.
d) Calcule analítica y gráficamente las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en un plano cuya normal forma ángulos de 60°, 30° y 90° con los ejes x, y y z, respectivamente.

Para los estados de esfuerzos definidos en los problemas **1.21** a **1.28**, determine gráficamente, mediante diagramas de Mohr:

a) Los esfuerzos principales, en magnitud y dirección.
b) El esfuerzo de corte máximo, así como la orientación del plano donde actúa.

Nota: Los esfuerzos están expresados en kgf/mm^2.

1.21

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

1.22

$$\sigma = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.23

$$\sigma = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

1.24

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.25

$$\sigma = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.26

$$\sigma = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

1.27

$$\sigma = \begin{bmatrix} -10 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.28

$$\sigma = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.29 Un estado de esfuerzos está definido como se muestra en la Figura P.1.29.

a) Determine gráficamente los esfuerzos y las direcciones principales.
b) Calcule el esfuerzo de corte máximo y el esfuerzo cortante octaedral.
c) Determine la orientación del plano donde el esfuerzo de corte es máximo.

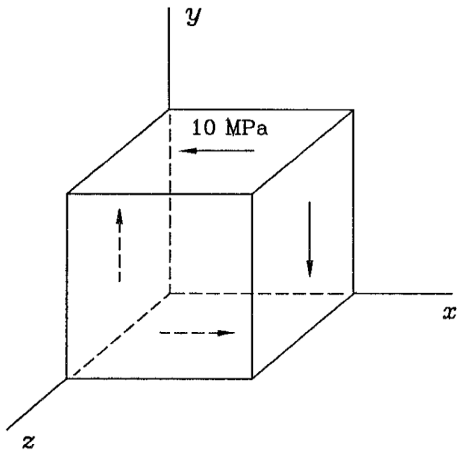


Figura P.1.29

1.30 La matriz de esfuerzos en un punto de un elemento de máquina viene dada por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ kgf/mm}^2$$

a) Represente este estado de esfuerzos en un tetraedro elemental.
b) Determine gráficamente, usando círculos de Mohr, los esfuerzos y las direcciones principales. Haga un gráfico que muestre la orientación del sistema principal con relación al sistema *xyz*

1.31 Para el estado plano de esfuerzos definido por

$$\sigma_x = 7000 \text{ psi}$$
$$\sigma_y = 10000 \text{ psi}$$
$$\tau_{xy} = -5000 \text{ psi}$$

Determine gráfica y analíticamente:

a) Los esfuerzos y las direcciones principales.
b) El esfuerzo de corte máximo.
c) Las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en un plano cuya normal forma un ángulo de 30° en sentido antihorario con el eje *x*.
d) Las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en un plano cuya normal forma un ángulo de 15° en sentido antihorario con el esfuerzo principal máximo

1.32 El estado de esfuerzos en un punto está definido de la manera siguiente

$$\sigma = \begin{bmatrix} 600 & 350 & 0 \\ 350 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kgf/cm}^2$$

¿Es posible que exista un plano donde los esfuerzos normal y tangencial valgan 200 kgf/cm^2 y 300 kgf/cm^2, respectivamente? En caso afirmativo, determine la orientación de dicho plano.

1.33 Un estado plano de esfuerzos está definido por

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 0, \ \sigma_x < 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

Determine, analítica y gráficamente, la orientación del plano para el cual el esfuerzo normal es nulo. Encuentre también el esfuerzo de corte en dicho plano y verifique que coincide con el esfuerzo de corte máximo.

1.34 Demuestre que en un punto de un sólido, cualesquiera sean las magnitudes de los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3, el esfuerzo de corte en el plano octaedral no puede ser superior a $(2\sqrt{2}/3)\tau_{máx}$ ni inferior a $(\sqrt{2/3})\tau_{máx}$, donde $\tau_{máx} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$ es el esfuerzo de corte máximo.

1.35 Para el estado plano de esfuerzos mostrado en la Fig. P.1.35, determine gráficamente las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en un plano cuya normal forma un ángulo de 60° en sentido antihorario con el eje *x*.

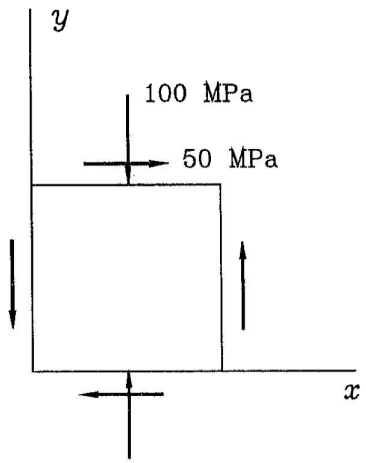


Figura P.1.35

1.36 En un punto de un elemento de máquina se conocen los esfuerzos en los planos *AB* y *BC* mostrados en la Fig. P.1.36. Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano y que la dirección principal según la cual el esfuerzo principal es nulo es ortogonal al plano del dibujo, determine los esfuerzos principales en magnitud y dirección.

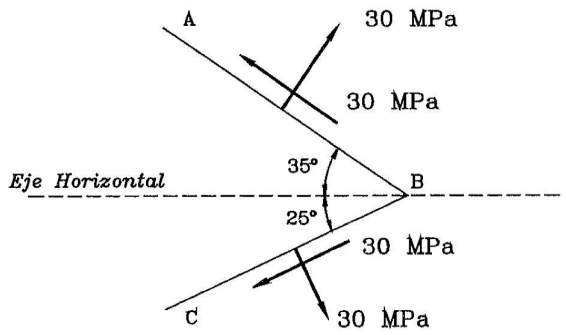


Figura P.1.36

1.37 Para el estado plano de esfuerzos mostrado en la Fig. P.1.37,

a) Determine gráficamente σ y τ.
b) Calcule los esfuerzos principales.

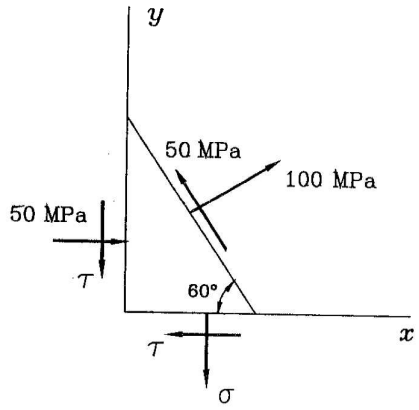


Figura P.1.37

1.38 Para el estado plano de esfuerzos mostrado en la Fig. P.1.38, determine gráficamente el esfuerzo de corte máximo. Verifique en forma analítica el resultado obtenido.

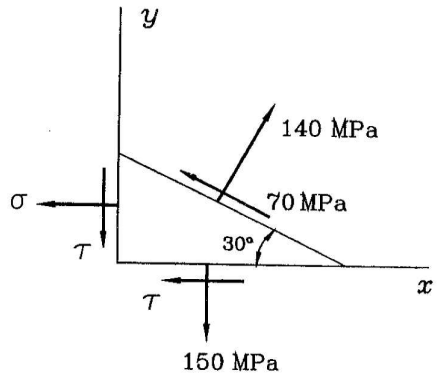


Figura P.1.38

1.39 El estado de esfuerzos en un punto está definido como se muestra en la Fig. P.1.39. Determine gráficamente y en forma analítica las componentes desconocidas de los esfuerzos, con la condición de que $\sigma_x = 2\sigma_y$.

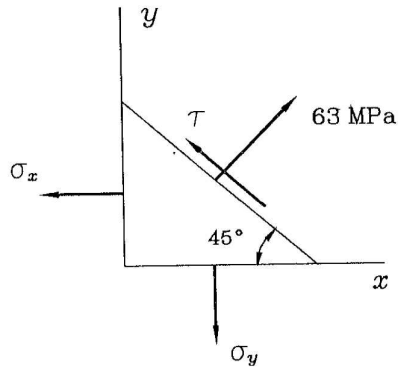


Figura P.1.39

1.40 En el punto más crítico de un elemento de máquina se sabe que el estado de esfuerzos es plano y se han determinado los esfuerzos

$$\sigma_{x1} = -20 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{x2} = 20 \text{ MPa}$$
$$\tau_{x2x3} = 40 \text{ MPa}$$

referidos a los ejes x_1, x_2 y x_3, como se muestra en la Fig. P.1.40.

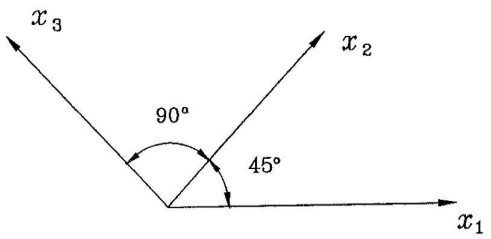


Figura P.1.40

a) Determine gráficamente, utilizando circunferencias de Mohr, los esfuerzos principales en magnitud y dirección.
b) Dibuje los ejes principales e indique su orientación con respecto a los ejes x_1, x_2 y x_3.
c) Verifique analíticamente los resultados obtenidos en (a).
d) ¿Existe algún plano cuya normal esté situada entre x_1 y x_3 donde el esfuerzo normal sea cero? En caso afirmativo determine la orientación de dicho plano y el esfuerzo de corte que en él actúa.

1.41 El punto más solicitado de un elemento de máquina está sometido al estado plano de esfuerzos mostrado en la Fig. P.1.41.
a) Determine gráficamente los esfuerzos σ_x y σ_y.
b) ¿Es posible que exista un plano donde el esfuerzo normal sea 60 MPa y el tangencial sea 40 MPa?. En caso afirmativo, determine la orientación de dicho plano.

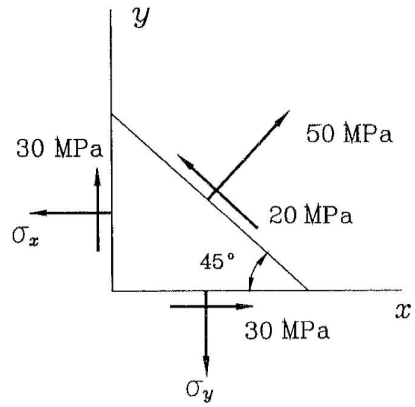


Figura P.1.41

1.42 Para el punto crítico ubicado sobre la superficie de una pieza sometida a un sistema de cargas, se evaluaron los esfuerzos normales en las tres direcciones *a*, *b* y *c* mostradas en la Fig. P.1.42. Dichos esfuerzos resultaron ser

$$\sigma_a = 4 \text{ kgf/mm}^2 \qquad \sigma_b = -2 \text{ kgf/mm}^2 \qquad \sigma_c = 4 \text{ kgf/mm}^2$$

Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano,
a) Determine gráficamente, utilizando circunferencias de Mohr, la magnitud de los esfuerzos principales y sus direcciones con relación a los ejes *a*, *b* y *c*. Dibuje los ejes principales.
b) Determine los esfuerzos de corte en los planos perpendiculares a los ejes *a*, *b* y *c*.
c) Calcule el esfuerzo de corte máximo y determine la orientación del plano donde éste actúa. Dibuje el plano.
d) Resuelva analíticamente las partes (a) y (b).
e) ¿Es posible que exista un plano donde las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo valgan ambas 3 kgf/mm^2?. En caso afirmativo, determine la orientación de dicho plano con relación a los ejes principales.

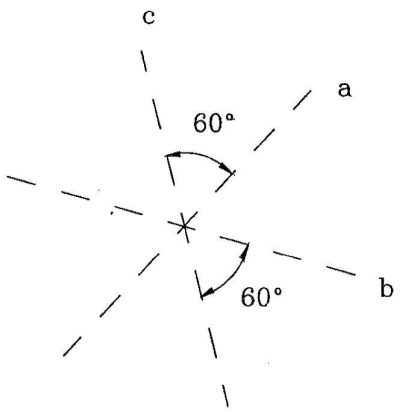


Figura P.1.42

1.43 Para un cierto punto de un sólido se encontró experimentalmente que los esfuerzos normales en las direcciones de tres ejes x_1, x_2 y x_3 eran

$$\sigma_{x1} = 4 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_{x2} = 2 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_{x3} = -2 \text{ kgf/mm}^2$$

como se muestra en la Fig. P.1.43.
Suponiendo que el estado de esfuerzos es plano, determine gráficamente, mediante el diagrama de Mohr, el esfuerzo de corte máximo en el punto considerado.

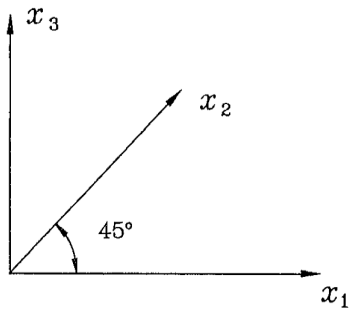


Figura P.1.43

1.44 El estado de esfuerzos en un punto está definido como se muestra en la Fig. P.1.44. Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano:

a) Determine gráficamente, utilizando el diagrama de Mohr, los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy}. Verifique analíticamente sus resultados.

b) Determine gráfica y analíticamente los esfuerzos principales en magnitud y dirección. Dibuje los ejes principales.

c) Calcule el esfuerzo de corte máximo y dibuje el plano donde éste actúa, señalando su orientación con relación a los ejes principales.

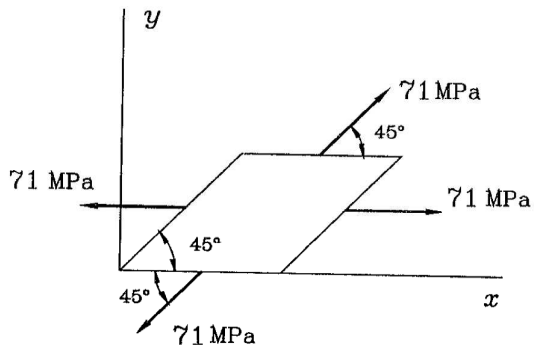


Figura P.1.44

1.45 En el punto más solicitado de una pieza se conocen las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en los planos *AB* y *BC* mostrados en la Fig. P.1.45. Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano, determine gráfica y analíticamente:

a) La matriz de esfuerzos.

b) El ángulo θ ($0 < \theta < 90°$).

c) Los esfuerzos principales, en magnitud y dirección.

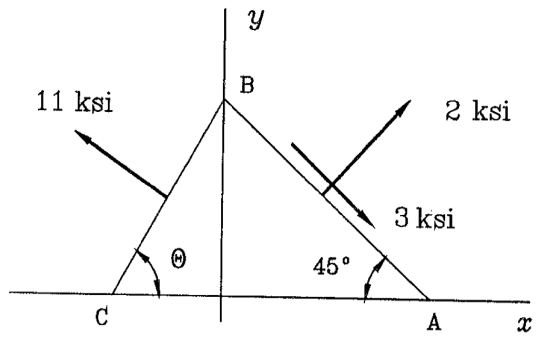


Figura P.1.45

1.46 Para el punto más solicitado de una pieza se conocen los esfuerzos indicados en la Fig. P.1.46. Utilizando el diagrama de Mohr, determine:

a) El valor máximo que puede tomar el esfuerzo de corte τ de manera que el esfuerzo de corte máximo no exceda los 180 MPa.
b) Los esfuerzos principales, en magnitud y dirección.
c) Determine la orientación del plano donde las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo son iguales a 40 MPa.

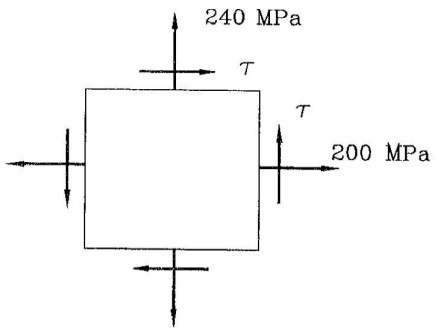


Figura P.1.46

1.47 Se sabe que el estado de esfuerzos en el punto más crítico de un sólido es plano. Al medir experimentalmente en dicho punto los esfuerzos normales sobre los planos *AB*, *BC* y *CD* mostrados en la Fig. P.1.47, se obtuvo

$$\sigma_{AB} = \sigma_{CD} = -500 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{(compresión)}$$

$$\sigma_{BC} = 1000 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{(tracción)}$$

a) Determine los esfuerzos y las direcciones principales.
b) ¿Existe algún plano ortogonal al plano del dibujo, localizado entre los planos *AB* y *CD*, donde el esfuerzo sea exclusivamente de corte? En caso afirmativo, determine cuánto vale ese esfuerzo de corte y cual es el ángulo que forma su normal con el eje horizontal.

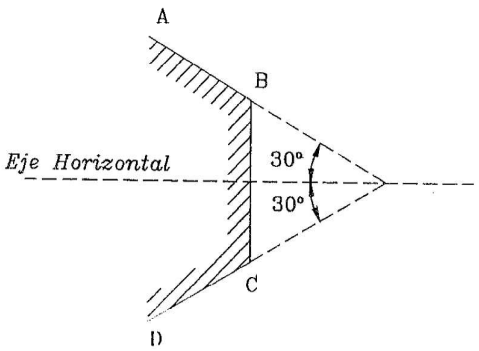


Figura P.1.47

1.48 Para el estado plano de esfuerzos mostrado en la Fig. P.1.48, determine gráfica y analíticamente:
a) El esfuerzo σ_x.
b) El ángulo θ.
c) El esfuerzo de corte máximo.

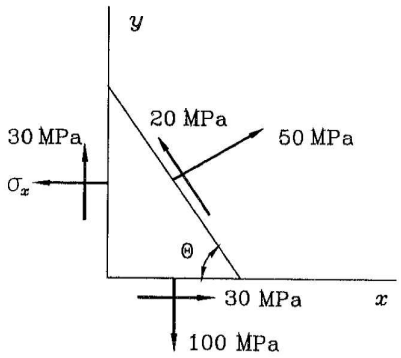


Figura P.1.48

1.49 En el punto más crítico de un sólido se determinó que los esfuerzos en los planos mostrados en la Fig. P.1.49 son

$$\sigma_{x1} = \tau_{x2x2} = \tau_{max} = 4 \text{ kgf/mm}^2$$

Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano, determine:
a) Los esfuerzos principales, en magnitud y dirección.
b) Las componentes de la matriz de esfuerzos en el sistema de coordenadas *xy*.

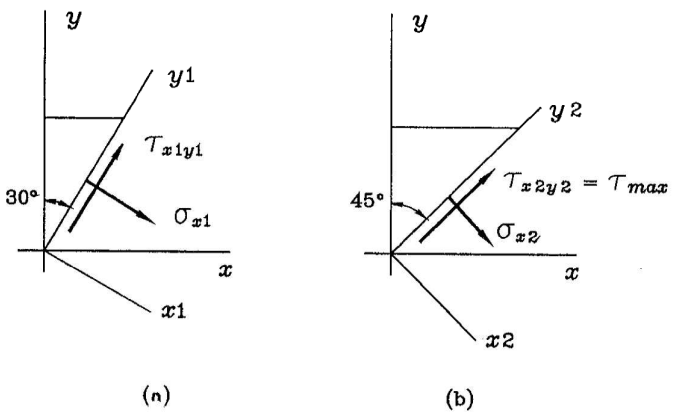


Figura P.1.49

1.50 En un punto se conocen las componentes de la matriz de esfuerzos

$$\sigma_x = -40 \text{ MPa}$$
$$\sigma_y = 60 \text{ MPa}$$
$$\sigma_z = 80 \text{ MPa}$$

Adicionalmente, se conocen las componentes normal $\sigma_{x1} = 100$ MPa y tangencial $\tau_{x1y1} = -50$ MPa en un plano como el mostrado en la Fig. P.1.50.

Determine gráficamente:

a) El esfuerzo τ_{xy}.
b) Los esfuerzos principales

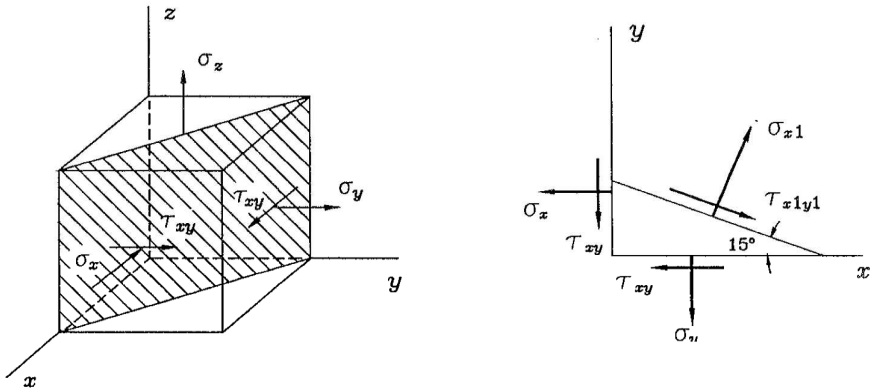


Figura P.1.50

1.51 El estado de esfuerzos en un punto está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ kgf/mm}^2$$

Determine gráficamente, mediante el diagrama de Mohr, los esfuerzos normal y tangencial en el plano *OBD* de la Fig. P.1.51.

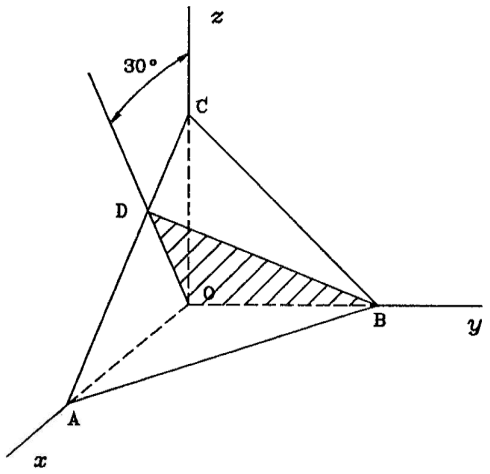


Figura P.1.51

1.52 En el punto más crítico de un elemento de máquina se conocen los vectores esfuerzo en los dos planos *AB* y *BC* mostrados en la Fig. P.1.52 y en el plano de normal **k**, en el cual **T**(**r**, **k**) = (40 MPa) **k**. Determine gráfica y analíticamente:

a) La matriz de esfuerzos.
b) Los esfuerzos principales, en magnitud y dirección.
c) El esfuerzo de corte máximo, indicando la orientación del plano donde éste actúa con relación a los ejes *xyz*. Dibuje este plano.
d) La normal al plano donde las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo valen 28 MPa y 62 MPa, respectivamente.

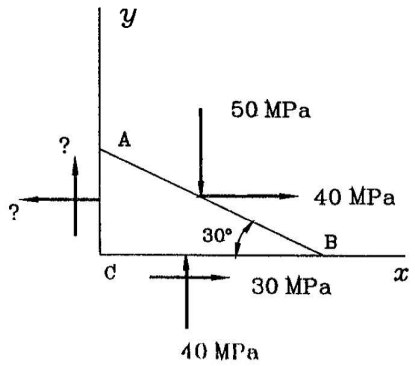


Figura P.1.52

1.53 Para un punto de un sólido se sabe que $\sigma_z = 6500$ psi y que $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Además, se conocen los esfuerzos mostrados en la Figura P.1.53.

a) Obtenga la matriz de esfuerzos.
b) Calcule los esfuerzos y direcciones principales.
c) Determine los esfuerzos de corte máximo y octaedral.

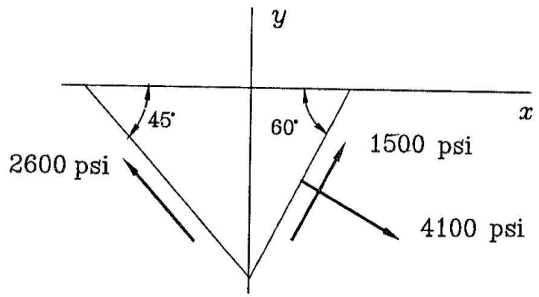
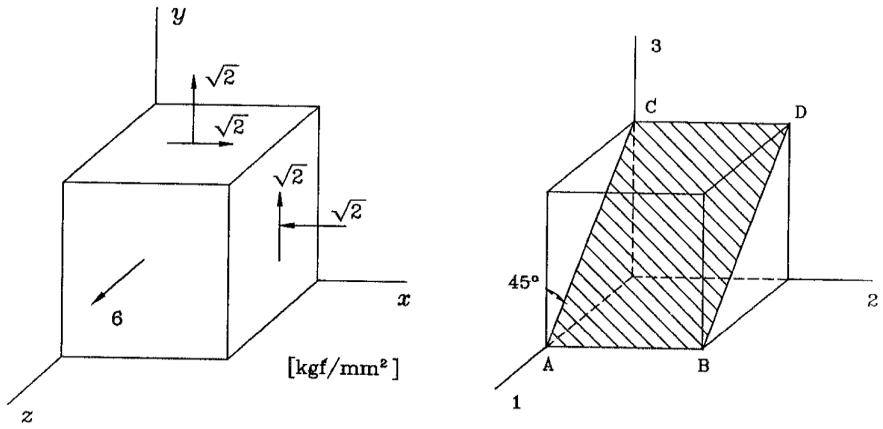


Figura P.1.53

1.54 El estado de esfuerzos en un punto de un sólido es como el que se muestra en la Fig. P.1.54a. Determine:

a) La matriz de esfuerzos referida al sistema de coordenadas *xyz*.
b) Los esfuerzos y las direcciones principales.
c) Las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en el plano *ABCD*, cuya orientación con respecto a los ejes principales es la mostrada en la Fig. P.1.54b.
d) La orientación del plano donde las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo son 4 kgf/mm² y 2 kgf/mm², respectivamente.



(a) (b)

Figura P.1.54

1.55 Los vectores esfuerzo en dos planos que pasan por un mismo punto son los indicados en la Fig. P.1.55. Sabiendo que el eje *z* es un eje principal y que $\sigma_z = 50$ MPa,

a) Determine los otros dos esfuerzos principales, en magnitud y dirección.
b) ¿Es posible que exista un plano, ortogonal al plano *xy*, tal que la componente normal del vector esfuerzo sea cero? Si su respuesta es afirmativa, determine el plano correspondiente; en caso contrario, argumente su respuesta.

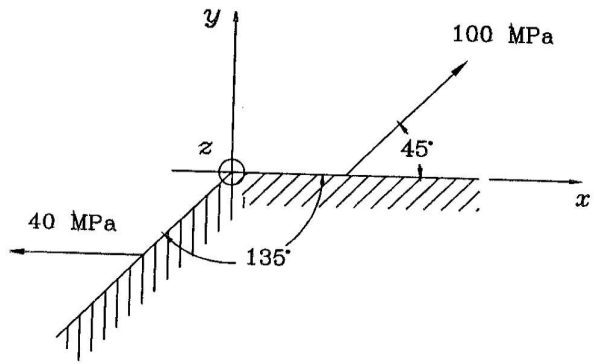


Figura P.1.55

1.56 El estado de esfuerzos en el punto más crítico de un elemento de máquina está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} -30 & -40 & 20 \\ -40 & -100 & 0 \\ 20 & 0 & 50 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

a) Represente gráficamente este estado de esfuerzos en un elemento de volumen.
b) Determine los esfuerzos normal y tangencial en el plano *OBD* mostrado en la Fig. P.1.51.
c) ¿Existe algún plano, ortogonal al plano *yz*, donde la componente normal del vector esfuerzo sea nula? En caso afirmativo, determine los ángulos que forma la normal a dicho plano con los ejes *x*, *y* y *z*, y calcule el esfuerzo tangencial que actúa sobre él.

1.57 El estado de esfuerzos en el punto más crítico de un elemento estructural está definido como se muestra en la Fig. P.1.57. Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano:

a) Determine gráficamente, utilizando círculos de Mohr, σ_x , σ_y y τ_{xy}. Verifique analíticamente sus resultados.
b) Determine los esfuerzos principales en magnitud y dirección. Dibuje los ejes principales.
c) Determine el esfuerzo de corte máximo y dibuje el plano donde éste actúa señalando su orientación con relación a los ejes x y y.

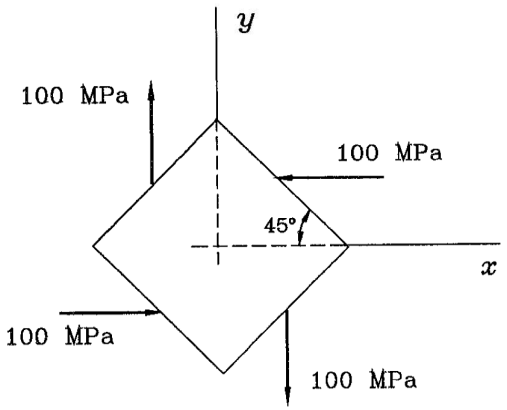


Figura P.1.57

1.58 El estado de esfuerzos en un punto de un elemento de máquina está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 20 \\ -5 & -10 & 0 \\ 20 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{ kgf/mm}^2$$

a) Represente este estado de esfuerzos en un elemento de volumen.
b) Determine el esfuerzo de corte máximo.
c) Sabiendo que en el plano *OCD* mostrado en la Fig. P.1.58 el esfuerzo normal vale –5 kgf/mm^2, determine el ángulo θ y el esfuerzo tangencial en ese plano.
d) ¿Existe algún plano en el cual $\sigma = -10$ kgf/mm^2 y $\tau = 15$ kgf/mm^2? En caso afirmativo, determine la orientación de dicho plano.

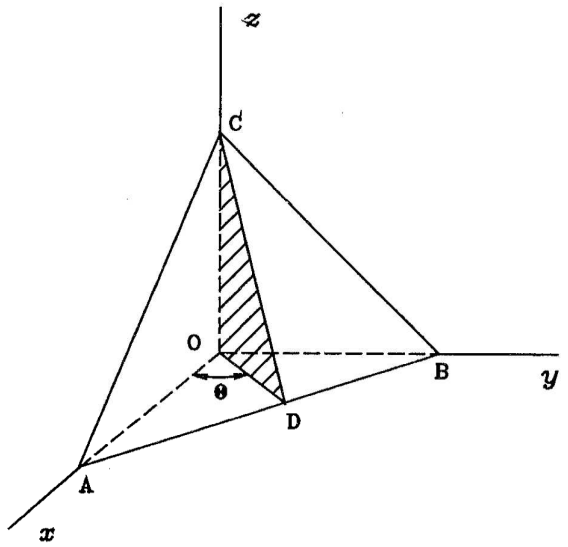


Figura P.1.58

1.59 La distribución de esfuerzos en un elemento de máquina está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 25x & -30y & 0 \\ -30y & 50y & 20x \\ 0 & 20x & 25z \end{bmatrix}$$

En el punto $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$:

a) ¿Existe algún plano en el cual el vector esfuerzo sea nulo? En caso afirmativo, determine los ángulos que forma la normal a dicho plano con los ejes x, y y z.
b) ¿Existe algún plano, ortogonal al plano xy, en el cual la componente normal del vector esfuerzo sea nula? En caso afirmativo, determine los ángulos que forma la normal a dicho plano con los ejes x, y y z.

1.60 En el punto más crítico de un miembro estructural se conocen las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo en los planos *AB* y *AC* mostrados en la Fig. P.1.60, mientras que las componentes σ y τ en el plano *BC* se desconocen. Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano,

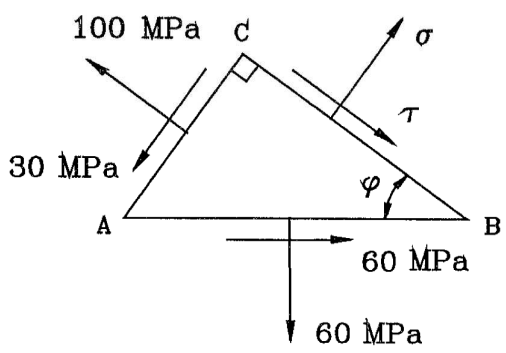


Figura P.1.60

a) Determine gráficamente, utilizando el diagrama de Mohr, las componentes σ y τ del vector esfuerzo en el plano *BC*, así como también el ángulo φ que este plano forma con la horizontal.
b) Determine gráficamente los esfuerzos principales en magnitud y dirección. Dibuje los ejes principales mostrando su orientación con relación al plano *AB*.
c) Determine el esfuerzo de corte máximo y dibuje el plano donde éste actúa, señalando su orientación con relación al plano *AB*.

1.61 El estado de esfuerzos en un punto de un componente mecánico está definido por

$$\sigma = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -40 \\ 0 & -40 & 100 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

a) ¿Para qué valores de p existen planos donde la componente normal del vector esfuerzo es nula?
b) Una vez determinado estos valores de p, escoja uno genérico y señale en el diagrama de Mohr todos aquellos puntos donde la componente normal del vector esfuerzo es nula.

1.62 En el punto más crítico de un miembro estructural se determinó que el vector esfuerzo en un plano perpendicular al eje z es nulo, mientras que en los planos *AB* y *AC*, ambos ortogonales al plano *xy*, los vectores esfuerzo tienen las magnitudes y las direcciones indicadas en la Fig. P.1.62. Como se observa, estos vectores esfuerzo son ortogonales a los planos donde actúan.

a) Determine la matriz de esfuerzos en este punto.
b) Represente estas componentes de la matriz de esfuerzos en un elemento de volumen infinitesimal.
c) ¿Existe algún plano ortogonal al plano *xy* en el cual la componente normal del vector esfuerzo es nula? En caso afirmativo, determine la normal a dicho plano.

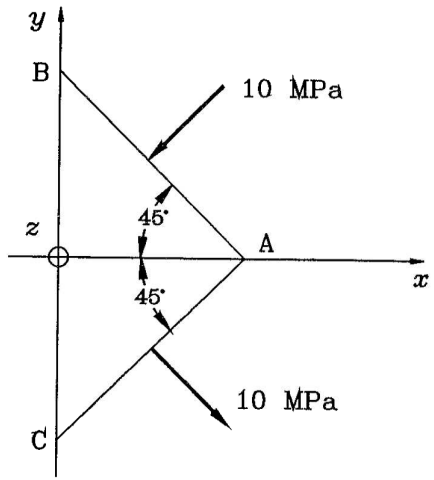


Figura P.1.62

1.63 Cuando se aplica un cierto sistema de cargas a un elemento de máquina, en su punto más crítico se genera el estado de esfuerzos mostrado en la Fig. P.163a. Manteniendo fijo este sistema de cargas, a dicho elemento se le superpone otro que genera ahora el estado de esfuerzos mostrado en la Fig. P.1.63b. Sabiendo que el eje perpendicular al plano del dibujo es principal y que el esfuerzo principal correspondiente es nulo, determine el valor máximo que puede tomar el esfuerzo de corte τ de manera que la superposición de ambos estados de esfuerzos no produzca un esfuerzo de corte máximo superior a 130 MPa en el punto considerado.

1.64 Para el punto más solicitado de una pieza se conocen los esfuerzos indicados en la Fig. P.1.64. Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano y que $\tau > 0$, determine:

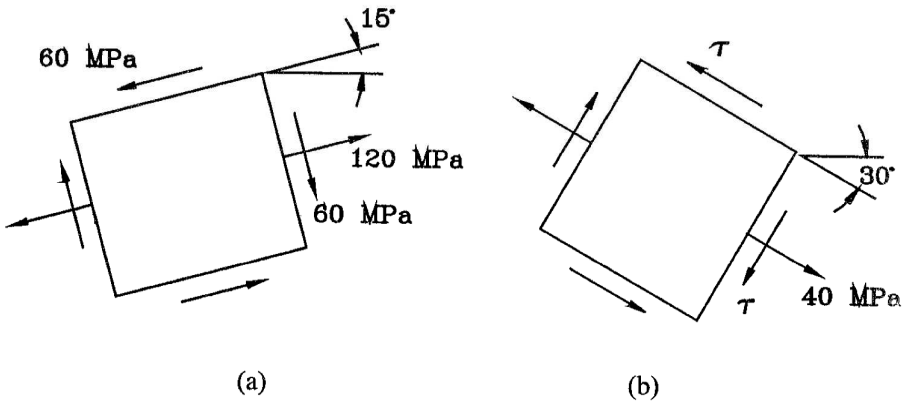


Figura P.1.63

a) El valor máximo que puede tomar el esfuerzo de corte τ de manera que el esfuerzo de corte máximo no exceda los 100 MPa.
b) Los esfuerzos principales, en magnitud y dirección.
c) ¿Es posible que exista algún plano donde las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo sean iguales a 50 MPa? Si su respuesta es afirmativa, determine la orientación del plano correspondiente.

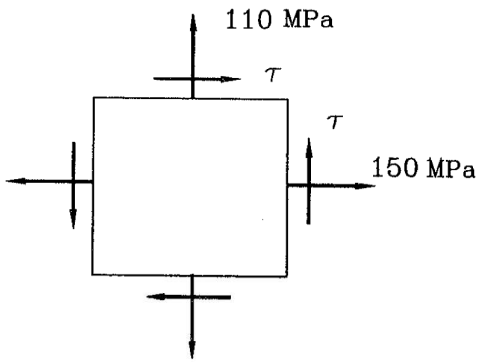


Figura P.1.64

1.65 En algunas aplicaciones resulta conveniente descomponer la matriz de esfuerzos en la forma $\sigma = \sigma^i + \sigma^d$, donde σ^i y σ^d son las llamadas componentes *isotrópica* y *desviadora* definidas por

$$\sigma^i = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}, \qquad \sigma^d = \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - p \end{bmatrix}$$

donde

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Determine los esfuerzos y las direcciones principales de la componente desviadora y establezca comparaciones con los esfuerzos y las direcciones principales de la matriz de esfuerzos.

1.66 Para la matriz de esfuerzos del problema 1.22,
a) Determine las componentes isotrópica y desviadora.
b) Calcule los esfuerzos y las direcciones principales de la componente desviadora.
c) ¿Qué relación existe entre los esfuerzos principales calculados en (b) y los de la matriz original? ¿Y entre las direcciones principales?

1.67 Un sólido está en equilibrio bajo la acción de fuerzas de volumen

$$\mathbf{f} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

y esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

donde $p = p(x, y, z)$ y $V = V(x, y, z)$ son campos escalares. Demuestre que $p + V$ es constante.

1.68 ¿Es posible que la distribución de esfuerzos en un sólido en equilibrio sin fuerzas de volumen venga dada por

$$\sigma_x = -Axy$$
$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}A(B^2 - y^2) + Cz \quad ?$$
$$\tau_{yz} = -Cy$$
$$\sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xz} \quad 0$$

1.69 Las ecuaciones aproximadas que se utilizan en ingeniería para el cálculo de los esfuerzos en una viga de sección circular sometida a flexión son

$$\sigma_x = My/I$$
$$\tau_{xy} = \frac{V}{3EI}(R^2 - y^2)$$
$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

donde $M = M(x)$ es el momento flector, $V = V(x)$ es la fuerza cortante, R es el radio de la sección transversal e $I = \pi R^4/4$ es el momento de inercia. Ignorando las fuerzas de volumen, ¿Satisface esta distribución de esfuerzos las ecuaciones de equilibrio?

1.70 La distribución de esfuerzos en un sólido viene dada por

$$\sigma = \begin{bmatrix} x^2 y & (1-y^2)x & 0 \\ (1-y^2)x & (y^2-3)y/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2z^2 \end{bmatrix} \text{kgf/mm}^2$$

Determine:

a) La distribución de las fuerzas de volumen.
b) Los esfuerzos principales en el punto $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + 2a\mathbf{k}$.
c) El esfuerzo de corte máximo en $\mathbf{r}$.
d) Los esfuerzos principales de la componente desviadora en $\mathbf{r}$.

1.71 Pruebe que, en ausencia de fuerzas de volumen, la siguiente distribución de esfuerzos satisface las ecuaciones de equilibrio:

$$\sigma_x = 3x^2 + 3y^2 - z$$
$$\sigma_y = 3y^2$$
$$\sigma_z = 3x + y - z + 5/4$$
$$\tau_{xy} = z - 6xy - 3/4$$
$$\tau_{xz} = x + y - 3/2$$
$$\tau_{yz} = 0$$

1.72 Dada la siguiente distribución de esfuerzos

$$\sigma_x = 3x^2 + 4xy - 8y^2$$
$$\sigma_y = 2x^2 + xy + 3y^2$$
$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2}x^2 - 6xy - 2y^2$$
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

determine si existe equilibrio en ausencia de fuerzas de volumen.

1.73 El campo de esfuerzos en un sólido viene dado por

$$\sigma_x = 20x^3 + y^2, \qquad \tau_{xy} = z$$
$$\sigma_y = 30x^3 + 200, \qquad \tau_{xz} = y^3$$
$$\sigma_z = 30y^2 + 30z^3, \qquad \tau_{yz} = x^3$$

Determine el campo de fuerzas de volumen tomando en cuenta que el sólido está en equilibrio.

1.74 Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de la componente tangencial del vector esfuerzo

Capítulo 2

Deformaciones

2.1 Introducción

En el capítulo anterior dijimos que el objetivo básico que nos ocupaba consistía en el establecimiento de relaciones de naturaleza cuantitativa que nos permitieran predecir el comportamiento de un sólido desde el punto de vista de su resistencia mecánica y de su rigidez cuando se le sometía a un sistema de cargas externas. A tales efectos, se llevó a cabo un estudio de la distribución de las cargas internas en el sólido en términos de los esfuerzos generados, quedando claro que, una vez conocida la matriz de esfuerzos en un punto, sería posible predecir si el sólido resistiría sin fallar las cargas externas aplicadas mediante el uso de las llamadas teorías de falla.

Sin embargo, salvo contadas excepciones, resulta imposible establecer una relación directa entre las cargas aplicadas y los esfuerzos que se generan sin antes analizar los desplazamientos y las deformaciones que el sólido experimenta. Justamente, en la última sección del capítulo anterior se pudo constatar que para determinar las seis componentes de la matriz de esfuerzos en función

de la posición se tenía a disposición únicamente tres ecuaciones de equilibrio, quedando claro que la formulación del problema planteado estaba incompleta.

Para continuar entonces con la formulación del problema que nos ocupa, en este capítulo se estudiará el movimiento general de un sólido en términos de las deformaciones que en él se producen. El estudio estará circunscrito a la cinemática de un cuerpo sólido deformable, razón por la cual no se considerarán las causas que generan el movimiento. Sin embargo, el camino quedará preparado para el establecimiento posterior de relaciones cuantitativas entre los esfuerzos que se generan en el sólido y las deformaciones que en él se producen, de manera que resulte posible formular completamente el problema de determinar los esfuerzos, los desplazamientos y las deformaciones en función de las cargas aplicadas al sólido.

A fin de completar parcialmente dicha formulación, los conceptos básicos necesarios serán introducidos con la mayor precisión y claridad posibles. Las ecuaciones fundamentales que gobiernan el movimiento del sólido serán también deducidas con el mismo propósito. Primero se estudiarán las denominadas *deformaciones infinitesimales* y posteriormente, cuando las ideas estén bien afianzadas, el concepto de *deformación finita* será introducido para comprender las limitaciones de la teoría de las pequeñas deformaciones. Los teoremas de existencia y unicidad de la solución serán presentados a través de las ecuaciones de compatibilidad y de la descripción cinemática de un movimiento rígido, respectivamente, de manera que estas ideas fundamentales sean expuestas con toda la rigurosidad que se requiere para abordar exitosamente la formulación y solución de problemas en análisis de esfuerzos en forma analítica o mediante la utilización de métodos numéricos.

2.2 Definiciones

Se dice que un sólido se *deforma* cuando la posición relativa entre sus puntos se altera al pasar de una configuración inicial no deformada a una configuración posterior deformada.

En nuestro análisis le pondremos un significado especial a las configuraciones inicial y final, sin prestarle ninguna atención a las configuraciones intermedias o a una secuencia particular de configuraciones a través de la cual tenga lugar la deformación.

Supongamos entonces que para el instante inicial $t = 0$ un sólido en reposo ocupa una región Ω del espacio, descrita en términos de un sistema

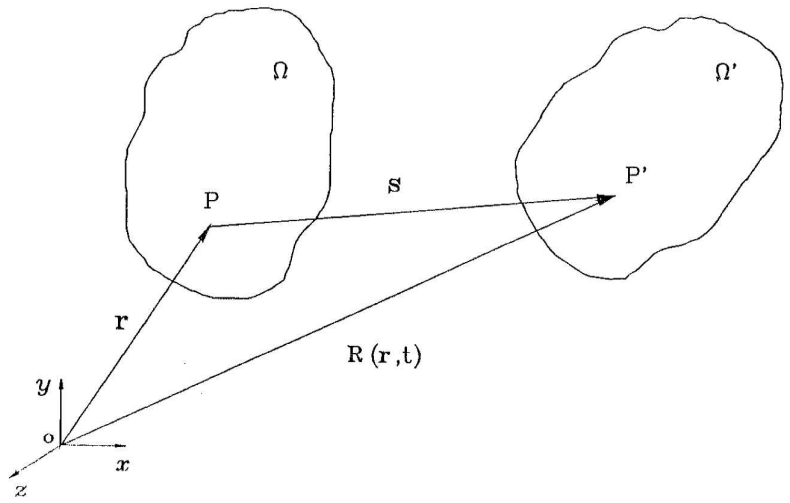
ortonormal de coordenadas xyz con origen en un punto fijo O. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ el vector de posición de una partícula genérica P del sólido en su configuración inicial indeformada, Fig. 2.1.

Cuando el cuerpo se desplaza, las partículas del sólido pasan a ocupar una nueva región Ω' del espacio. En particular, el punto genérico P pasará a ocupar para el instante t la posición P' descrita por la función vectorial

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(x, y, z, t) = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) \tag{2.1}$$

El vector de posición $\mathbf{s} = u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$ del punto P' con relación a P representa el desplazamiento del punto P cuando el sólido se mueve desde la configuración Ω hasta la configuración Ω' y se denomina *vector desplazamiento*. Por supuesto, u, v y w son los desplazamientos del punto P en la dirección de los ejes x, y y z, respectivamente, y serán, en general, función de la posición y del tiempo; es decir

$$u = u(x, y, z, t)$$
$$v = v(x, y, z, t)$$
$$w = w(x, y, z, t)$$



Tenemos así que

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r}, t) \tag{2.2}$$

En todo nuestro análisis supondremos que, excepto posiblemente en algunos puntos, curvas o superficies singulares, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{s}$ son funciones continuas con derivadas parciales continuas de cualquier orden.

Supondremos adicionalmente que la relación (2.1) es uno a uno y que, por lo tanto, podemos invertirla para obtener

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) \tag{2.3}$$

Cuando se utiliza la función (2.1) para analizar el movimiento del sólido, se habla de una descripción *Lagrangiana* del movimiento. Por el contrario, si se utiliza la función inversa (2.3), se habla entonces de una descripción *Euleriana*. En mecánica de fluidos se emplea exclusivamente la formulación de Euler, mientras que en mecánica de sólidos, tal como se hará aquí, se utiliza la formulación de Lagrange.

Definimos la *velocidad* de la partícula P con vector de posición $\mathbf{r}$ como

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)] = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \tag{2.4}$$

De la misma manera, definimos la *aceleración* de la partícula P como

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.1

El campo de desplazamientos en un sólido está definido por

$$u = 2 + 0.001(2x + 3y)$$
$$v = 3 + 0.001(x + 3y)$$
$$w = 2 + 0.002(y + z)$$

donde los desplazamientos u, v, w y las coordenadas x, y, z están expresados en mm.

a) Determinar el vector que une a los puntos $A(100,100,100)$ y $B(100, -100, 0)$ en la configuración deformada del sólido.

b) Calcular la variación de longitud del segmento $\overline{AB}$.

c) Calcular la variación del ángulo entre los vectores $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, siendo O el origen del sistema de coordenadas.

Solución: a) Los vectores de posición de los puntos A y B son

$$\mathbf{r}_A = 100\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_B = 100\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$$

En la configuración deformada, sus vectores de posición vienen dados por la Ec. (2.2). Esto es

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{r}_A + \mathbf{s}(100, 100, 100) = 102.5\mathbf{i} + 103.4\mathbf{j} + 102.4\mathbf{k}$$
$$\mathbf{R}_B = \mathbf{r}_B + \mathbf{s}(100, -100, 0) = 101.9\mathbf{i} - 97.2\mathbf{j} + 1.8\mathbf{k}$$

de manera que las coordenadas de los puntos A y B en la configuración deformada son $A'(102.5, 103.4, 102.4)$ y $B'(101.9, -97.2, 1.8)$.

El vector

$$\overline{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = -200\mathbf{j} - 100\mathbf{k}$$

se transforma entonces en el vector $\overline{A'B'}$ dado por

$$\overline{A'B'} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A = -0.6\mathbf{i} - 200.6\mathbf{j} - 100.6\mathbf{k}$$

b) Las longitudes de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son

$$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2 + (-200)^2 + (-100)^2} = 223.6\text{mm}$$

$$|\overline{A'B'}| = \sqrt{(-0.6)^2 + (-200.6)^2 + (-100.6)^2} = 224.4\text{mm}$$

Luego, la variación de longitud del segmento $\overline{AB}$ será

$$\Delta L_{AB} = |A'B'| - |AB| = 224.4 - 223.6 = 0.8\text{mm}$$

c) A partir de la definición del producto escalar de dos vectores podemos obtener el ángulo inicial entre los vectores $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$. Tenemos así que

$$\cos\theta = \frac{\overline{OA} \circ \overline{OB}}{|\overline{OA}|\,|\overline{OB}|} = \frac{(100)(100) + (100)(-100) + (100)(0)}{(100\sqrt{3})(100\sqrt{2})} = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 90°$$

Para determinar el ángulo final θ' entre los vectores $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, tenemos primero que calcular el desplazamiento del punto O para ubicar los vectores $\overline{O'A'}$ y $\overline{O'B'}$ en la configuración deformada del sólido. Entonces

$$\mathbf{R}_O = \mathbf{r}_O + \mathbf{s}(0,0,0) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Luego

$$\overline{O'A'} = \mathbf{R}_A - \mathbf{R}_O = 100.5\mathbf{i} + 100.4\mathbf{j} + 100.4\mathbf{k}$$
$$\overline{O'B'} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_O = 99.9\mathbf{i} - 100.2\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k}$$

De donde se tiene que

$$\cos\theta' = \frac{\overline{O'A'} \circ \overline{O'B'}}{|\overline{O'A'}|\,|\overline{O'B'}|}$$

$$= \frac{(100.5)(99.9) + (100.4)(-100.2) + (100.4)(-0.2)}{(173.96)(141.49)} = -0.0016$$

$$\Rightarrow \theta' = 90.0936°$$

Luego, la variación del ángulo entre los vectores $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ será

$$\Delta\theta = \theta' - \theta = 90.0936° - 90.0° = 0.0936° = 0.0016\,\text{rad}$$

2.3 Deformación Normal

Cuando un sólido se somete a un sistema de cargas externas, cada uno de sus puntos experimenta, en general, un desplazamiento. Como resultado global, el sólido en su conjunto se mueve. Este movimiento del sólido puede descomponerse en un *movimiento rígido* y en una *deformación pura*. El movimiento como cuerpo rígido puede descomponerse en una traslación más una rotación, mientras que la deformación del sólido puede, a su vez, caracterizarse por *cambios de longitudes* y por *variaciones de ángulos* o *distorsiones*.

En efecto, debido a que en el movimiento de un sólido deformable los desplazamientos de los puntos materiales que lo componen son, en general, diferentes, las distancias entre éstos cambian y los ángulos entre curvas o superficies varían. A un cambio de longitud se le llama *deformación normal* o *longitudinal*, mientras que a la variación de un ángulo se le da el nombre de *deformación tangencial* o *cortante*. La manera de expresar cuantitativamente estas dos deformaciones es, hasta cierto punto, arbitraria. Las definiciones que usaremos aquí son bastante convencionales y tienen la ventaja de conducir a una formulación matemática conveniente, como veremos en el Cap. 3.

Dado que el movimiento de un sólido como cuerpo rígido no produce esfuerzos, nosotros estaremos primariamente interesados en extraer del movimiento general de un sólido la parte correspondiente a la deformación pura, descartando por completo la parte rígida del movimiento.

Consideremos entonces dos puntos P y Q infinitamente próximos entre sí. Sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ sus vectores de posición en el instante inicial $t = 0$, Fig. 2.2.

Cuando el sólido pasa de la configuración inicial no deformada Ω a la configuración deformada Ω', los puntos P y Q experimentan sendos desplazamientos $\mathbf{s}$ y $\mathbf{s}+d\mathbf{s}$, pasando a ocupar las posiciones P' y Q', respectivamente. La longitud inicial del segmento $\overline{PQ}$ es $|d\mathbf{r}|$, mientras que su longitud final es $\overline{P'Q'} = |d\mathbf{R}|$.

Sea $\mathbf{n}$ un vector unitario en la dirección del elemento infinitesimal $d\mathbf{r}$. Entonces

$$d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}|\,\mathbf{n} \tag{2.6}$$

En la configuración final, el elemento infinitesimal $d\mathbf{r}$ tendrá una longitud $|d\mathbf{R}|$ y la dirección del vector unitario N definido por

$$d\mathbf{R} = |d\mathbf{R}|\,\mathbf{N} \tag{2.7}$$

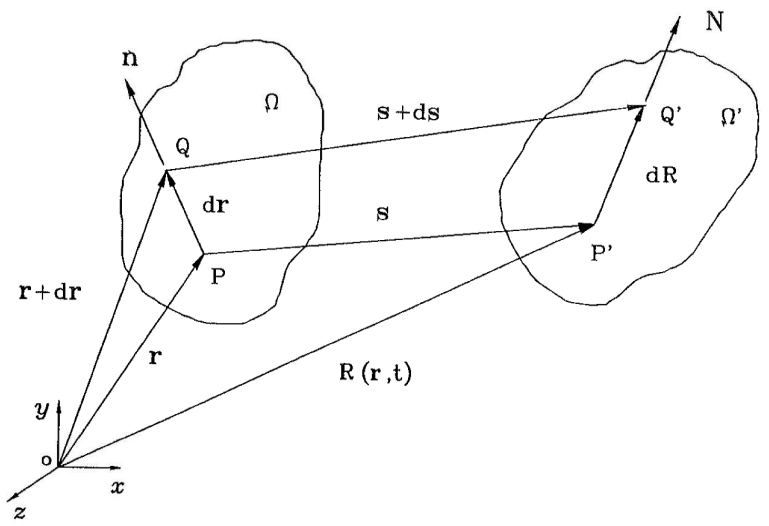


Figura 2.2 Deformación normal

Dado que los desplazamientos de los puntos P y Q son, en general, diferentes, el elemento infinitesimal $d\mathbf{r}$ se traslada, rota y cambia su longitud.

Definimos la *deformación normal* o *longitudinal* en el punto de vector de posición $\mathbf{r}$ y en la dirección del vector $\mathbf{n}$ como la variación de longitud por unidad de longitud de un elemento infinitesimal inicialmente con origen en $\mathbf{r}$ y paralelo $\mathbf{n}$. Esto es

$$\varepsilon_n = \frac{|d\mathbf{R}| - |d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{r}|} \tag{2.8}$$

Esta deformación normal será positiva si se trata de un alargamiento y negativa si se refiere a una contracción. Obviamente, la deformación normal es adimensional.

Ejemplo 2.2

En la Fig. 2.3 se muestra una barra de aluminio de 2 m de longitud y sección transversal rectangular de dimensiones 25×16 mm. La barra está empotrada en su extremo superior y sometida a la acción de una carga de

7000 kgf en la parte inferior. Debido al efecto de esta carga, el extremo inferior de la barra se desplaza verticalmente 5 mm hacia abajo.

a) Calcular la deformación normal en la dirección axial de la barra.

b) Suponiendo que el volumen se mantiene constante, calcular la deformación normal en la dirección transversal de la barra.

c) ¿Cuáles son las dimensiones de la sección transversal deformada?

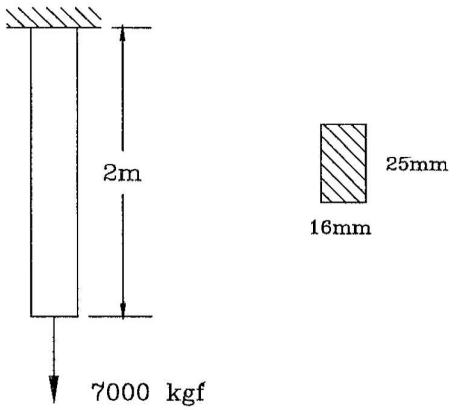


Figura 2.3 Ejemplo 2.2

Solución: a) Cuando una barra de sección transversal uniforme como la mostrada en la Fig. 2.3 se somete a una carga axial cuya línea de acción pasa por el centroide de cada sección transversal, puede comprobarse experimentalmente que el desplazamiento longitudinal que experimenta cada punto de la barra depende únicamente de su distancia al extremo fijo, variando linealmente desde cero en este extremo hasta un valor máximo en la sección donde se aplica la carga. Escogiendo entonces un sistema de coordenadas con origen en el extremo fijo y con una orientación tal que el eje x coincida con la dirección axial se tendrá que

$$u(x) = \frac{\Delta L}{L} x \tag{a}$$

donde $u = u(x)$ es el desplazamiento axial de un punto genérico P en función de la coordenada x, ΔL es la elongación total y L es la longitud inicial indeformada de la barra (ver Fig. 2.4).

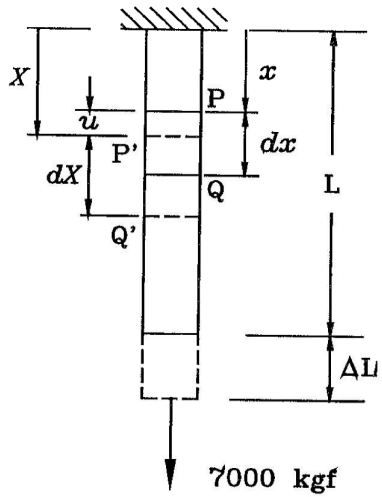


Figura 2.4 Ejemplo 2.2

Usando esta expresión y la componente en x de la Ec. (2.2), tenemos que la posición final del punto genérico P viene dada por

$$X = x + u(x) = x + \frac{\Delta L}{L} x = \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) x \tag{b}$$

Tomando otro punto Q a una distancia infinitesimal dx del punto P (ver Fig. 2.4), obtenemos la longitud final del segmento $\overline{PQ} = dx$ diferenciando la Ec. (b). Esto es

$$\overline{P'Q'} = dX = \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) dx$$

La deformación normal de la porción PQ, de acuerdo con la definición (2.8), será entonces

$$\varepsilon_x = \frac{dX - dx}{dx} = \frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) dx - dx}{dx} = \frac{\Delta L}{L}$$

Una manera más intuitiva de determinar esta deformación sería simplemente calculando el desplazamiento relativo entre los puntos P y Q. En efecto, si el punto P experimenta un desplazamiento absoluto u, entonces el punto Q, que se encuentra a una distancia infinitesimal dx de P, experimentará un desplazamiento absoluto $u+du$. La deformación normal será el desplazamiento relativo por unidad de longitud. Esto es

$$\varepsilon_x = \frac{u + du - u}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L}$$

donde se ha utilizado la Ec. (a) para evaluar la derivada de u con respecto a x. Nótese que esta deformación no depende de la coordenada x, por lo que se concluye que esta deformación es idéntica para toda la barra e independiente de la posición. En consecuencia, la deformación normal en la dirección axial de una barra de sección transversal uniforme puede calcularse simplemente como la variación total de la longitud por unidad de longitud; esto es

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} \qquad \text{(c)}$$

En el presente ejemplo se tiene

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{5\text{mm}}{2000\text{mm}} = 0.0025$$

b) Al producirse una elongación en la dirección axial, la barra se contrae transversalmente por la tendencia que tiene el material a conservar su volumen. Esta contracción o desplazamiento lateral varía linealmente desde un valor máximo en la superficie hasta hacerse cero en el eje de la barra, pudiendo demostrarse, igual como se hizo en la parte (a), que las deformaciones transversales en las direcciones y y z son constantes en toda la barra.

Sean a = 16 mm y b = 25 mm las dimensiones de la sección transversal paralelas a los ejes y y z, respectivamente (Fig. 2.3). Entonces

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$$

donde Δa y Δb son las variaciones de longitud de los lados a y b, respectivamente y ε es la deformación transversal común a ambas direcciones.

De estas expresiones se deduce que

$$\Delta a = a\varepsilon, \quad \Delta b = b\varepsilon$$

Suponiendo entonces que el volumen se mantiene constante al aplicar la carga axial, se tiene que

$$\begin{aligned} Lab &= (L + \Delta L)(a + \Delta a)(b + \Delta b) \\ &= (L + L\varepsilon_x)(a + a\varepsilon)(b + b\varepsilon) \\ &= Lab(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon)^2 \end{aligned}$$

De aquí se concluye que

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_x}} - 1$$

Sustituyendo el valor ε_x = 0.0025 obtenido en la parte (a), obtenemos finalmente

$$\varepsilon = -0.00125$$

c) Las contracciones que experimentan las dimensiones transversales a y b son

$$\Delta a = a\varepsilon = 16\text{mm}\,(-0.00125) = -0.02\,\text{mm}$$
$$\Delta b = b\varepsilon = 25\text{mm}\,(-0.00125) = -0.03\,\text{mm}$$

De aquí se concluye que las dimensiones de la sección transversal deformada son 15.98 × 24.97 mm.

Ejemplo 2.3

En la Fig. 2.5 se muestra una barra de acero de 3 m de longitud y sección transversal circular de 18 mm de diámetro. La barra está empotrada en su extremo A e inicialmente existe una holgura de 1 mm entre su extremo C y el apoyo fijo D. Al aplicar una fuerza axial de 8000 kgf en la sección B, ésta se desplaza 3 mm hacia abajo, produciéndose el contacto entre C y D. Despreciando el efecto del peso propio de la barra, calcule las deformación axial en los tramos AB y BC.

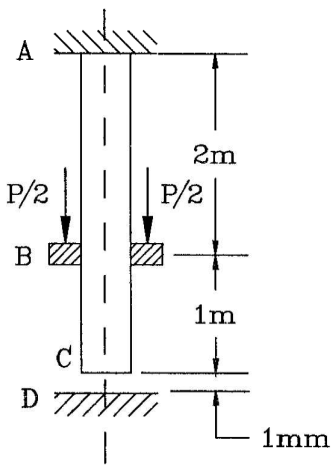


Figura 2.5 Ejemplo 2.3

Solución: Como el punto *A* está fijo y el punto *B* se desplaza 3mm por efecto de la fuerza de 8000 kgf, el alargamiento del tramo *AB* es justamente 3 mm. Entonces, usando los resultados del ejemplo 2.2, se tiene que la deformación normal del tramo *AB* es

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\Delta L_{AB}}{L_{AB}} = \frac{3\text{mm}}{2000\text{mm}} = 0.0015$$

Para determinar la deformación normal del tramo *BC* observamos que el desplazamiento absoluto del extremo *C* es de 1 mm hacia abajo, mientras que el punto *B* se desplaza 3 mm también hacia abajo. El desplazamiento relativo entre *B* y *C* es entonces 1-3 = - 2 mm, por lo que se concluye que el tramo *BC* se contrae con una deformación normal

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\Delta L_{BC}}{L_{BC}} = \frac{-2\text{mm}}{1000\text{mm}} = -0.0020$$

Ejemplo 2.4

La barra rígida *ABC* mostrada en la Fig. 2.6 se encuentra en posición horizontal cuando los cables *BD* y *BE* están indeformados y libres de cargas. Al aplicar una fuerza *P* en el punto *C*, éste se desplaza verticalmente hacia abajo 5 mm. En estas condiciones de carga, determinar la deformación axial de los cables *BD* y *BE*.

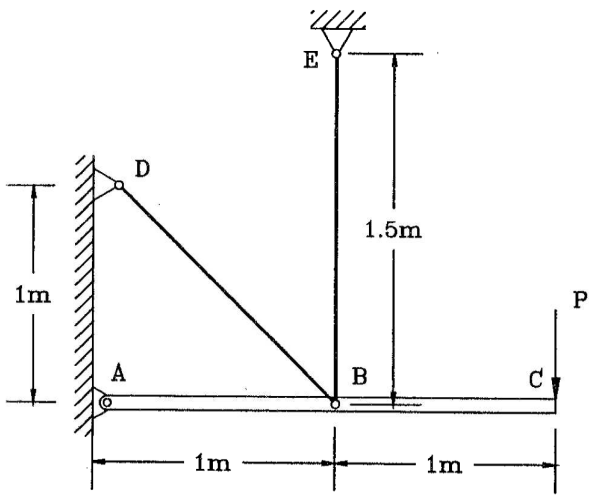


Figura 2.6 Ejemplo 2.4

Solución: Como la barra *ABC* puede considerarse indeformable en comparación con los cables *BD* y *BE*, al aplicar una fuerza vertical *P* en el punto *C*, éste se desplaza describiendo un arco de circunferencia de radio *AC*. En la Fig. 2.7 se muestra con líneas de trazos la estructura en su configuración deformada.

Sea α el ángulo descrito por la rotación de la barra *AC* y sean *B'* y *C'* las posiciones finales de los puntos *B* y *C*, respectivamente. Entonces, de la Fig. 2.7 tenemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC'}} = \frac{5\text{mm}}{2000\text{mm}} = 0.0025 \Rightarrow \alpha = 0.143^\circ$$

La longitud inicial indeformada del cable *BD* es

$$\overline{BD} = \sqrt{(1.0)^2 + (1.0)^2}\ \text{m} = 1.4142\,\text{m}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo *AB'D*, obtenemos la longitud final del cable *BD*:

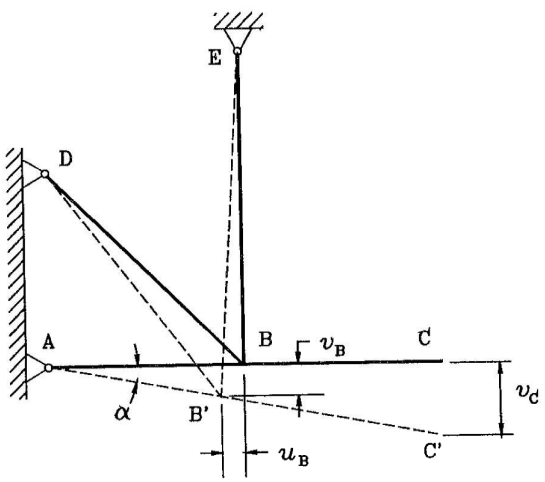


Figura 2.7 Ejemplo 2.4

$$\overline{B'D} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AB'}^2 - 2\,\overline{AD}\;\overline{AB'}\cos(90° + \alpha)}$$
$$= \sqrt{(1.0)^2 + (1.0)^2 - 2\,(1.0)\,(1.0)\cos(90° + 0.143°)}$$
$$= 1.4160\,\text{mm}$$

Entonces la deformación axial del cable *BD* es

$$\varepsilon_{BD} = \frac{\overline{B'D} - \overline{BD}}{\overline{BD}} = \frac{1.4160 - 1.4142}{1.4142} = 0.0013$$

La longitud final del cable *BE* es

$$\overline{B'E} = \sqrt{(\overline{BE} + v_B)^2 + u_B^2}$$

donde u_B y v_B son los desplazamientos horizontal y vertical del punto *B*, respectivamente. De la Fig. 2.7 se tiene que

$$u_B = \overline{AB} - \overline{AB}\cos\alpha = 1.0 - 1.0\cos(0.143°) \approx 0$$
$$v_B = \overline{AB'}\,\text{sen}\,\alpha = 1.0\,\text{sen}\,(0.143°) = 0.0025\,\text{m} = 2.5\,\text{mm}$$

Luego

$$\overline{B'E} = \sqrt{(1.5 + 0.0025)^2 + 0^2} = 1.5025\text{m}$$

y la deformación axial del cable *BE* será

$$\varepsilon_{BE} = \frac{\overline{B'E} - \overline{BE}}{\overline{BE}} = \frac{1.5025 - 1.5000}{1.5000} = 0.0017$$

Ejemplo 2.5

Un recipiente de acero de 120" de diámetro exterior y 1.375" de espesor contiene un gas a una presión de 825 psi. Sabiendo que por efecto de la presión interna el diámetro externo aumenta hasta un valor de 120.1440" (ver Fig. 2.8), calcular la deformación normal circunferencial del recipiente.

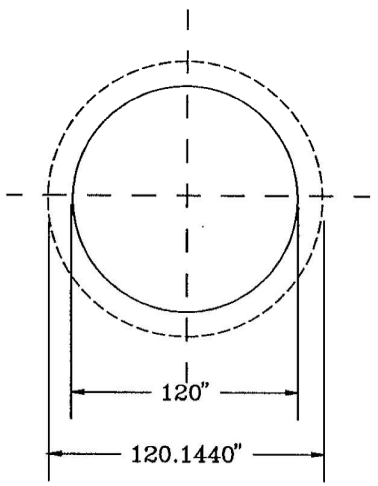


Figura 2.8 Ejemplo 2.5

Solución: El perímetro inicial del recipiente es πD, siendo D el diámetro nominal externo. Por efecto de la presión, el diámetro se incrementa en ΔD. Luego el perímetro final del recipiente deformado será $\pi(D+\Delta D)$ y la deformación normal circunferencial vendrá dada por

$$\varepsilon_c = \frac{\pi(D + \Delta D) - \pi D}{\pi D} = \frac{\Delta D}{D} = \frac{120.1440 - 120.0}{120.0} = 0.0012$$

2.4 Deformación Tangencial

Consideremos ahora dos elementos infinitesimales $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{q}$ perpendiculares entre sí [24]. Sean **n** y **m** los vectores unitarios en las direcciones de $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{q}$, respectivamente. Es decir

$$d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}|\,\mathbf{n} \tag{2.9a}$$

$$d\mathbf{q} = |d\mathbf{q}|\,\mathbf{m} \tag{2.9b}$$

Sean $d\mathbf{R}$ y $d\mathbf{Q}$ los vectores que definen a estos segmentos infinitesimales en la configuración deformada del sólido, Fig. 2.9. Sean **N** y **M** los vectores unitarios en las direcciones de $d\mathbf{R}$ y $d\mathbf{Q}$.

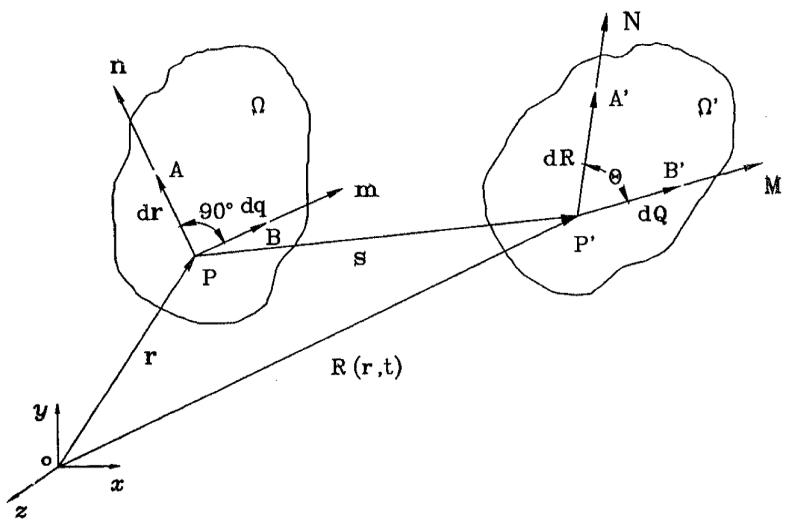


Figura 2.9 Deformación tangencial

[24] La razón por la cual se consideran dos elementos inicialmente perpendiculares entre sí es de pura conveniencia algebraica para los desarrollos matemáticos posteriores. Puede demostrarse que esta suposición, contrariamente a lo que pudiera parecer, no le quita ninguna generalidad a la formulación de nuestra teoría de las deformaciones.

Definimos la *deformación tangencial* o *cortante* entre las direcciones **n** y **m** en el punto de vector de posición **r** de un sólido como la mitad[25] de la variación del ángulo inicialmente recto entre los vectores **n** y **m**. Esto es

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{2}(\pi/2 - \theta) \tag{2.10}$$

Esta deformación también es adimensional. Se considera positiva si el ángulo inicialmente recto disminuye ($\theta < \pi/2$) y negativa en caso contrario ($0 > \pi/2$).

Ejemplo 2.6

Bajo la acción de un cierto estado de esfuerzos, la placa cuadrada de aluminio *ABCD* se deforma hasta llegar a la configuración *A'B'C'D'* mostrada con líneas de trazos en la Fig. 2.10.

a) Calcular la deformación normal que sufre la placa en la dirección de la diagonal *AC*.

b) Calcular la deformación tangencial entre las diagonales *AC* y *BD* en el punto *O*.

Solución: a) En la Fig. 2.11 se observa que la diagonal *AC* rota y cambia de longitud. A efectos de determinar su deformación normal bastará con calcular sus longitudes inicial y final. Tenemos así que:

$$\overline{AC} = \sqrt{(50)^2 + (50)^2} = 70.7107\text{cm}$$

$$\overline{A'C'} = \sqrt{(50+0.20)^2 + (50-0.05)^2} = 70.8170\text{cm}$$

Luego

$$\varepsilon_{AC} = \frac{70.8170 - 70.7107}{70.7107} = 0.0015$$

[25] En los textos básicos de Resistencia de Materiales y Mecánica de Materiales la deformación tangencial se define como la variación *total* del ángulo inicialmente recto. Sin embargo, tal como se verá más adelante, la definición establecida por medio de la Ec.(2.10) tiene la ventaja de conducir a una analogía completa, desde el punto de vista matemático, entre los esfuerzos y las deformaciones, razón por la cual se ha adoptado en este texto.

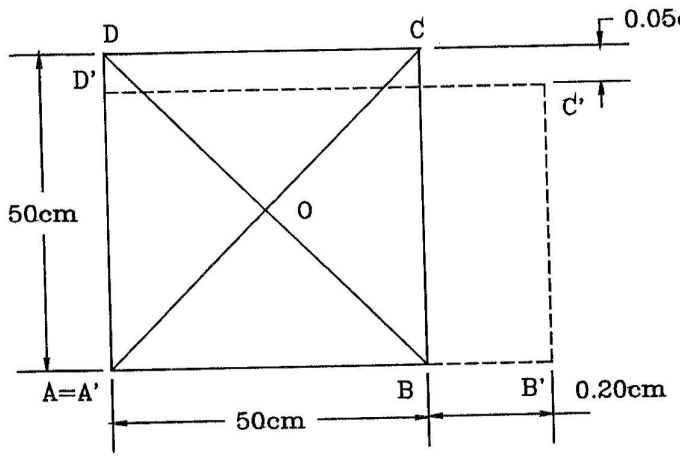


Figura 2.10 Placa cuadrada deformada del ejemplo 2.6

b) Para evaluar la deformación tangencial entre las diagonales AC y BD consideremos sus posiciones finales en la configuración deformada, Fig. 2.11. El ángulo inicialmente recto BOC entre ambas diagonales degeneró en el ángulo agudo $B'O'C'$. Aplicando la definición dada para la deformación tangencial, Ec. (2.10), tenemos que

$$\gamma = \frac{1}{2}(\pi/2 - \alpha)$$

De la Fig. 2.11 tenemos que

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{B'C'}/2}{\overline{A'B'}/2} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{50.0 - 0.05}{50.0 + 0.20} = 0.9950$$

$$\Rightarrow \alpha = 89.71° = 0.4984\,\pi \text{ rad}$$

Entonces

$$\gamma = \frac{1}{2}(\pi/2 - 0.4984\pi) = 0.0025$$

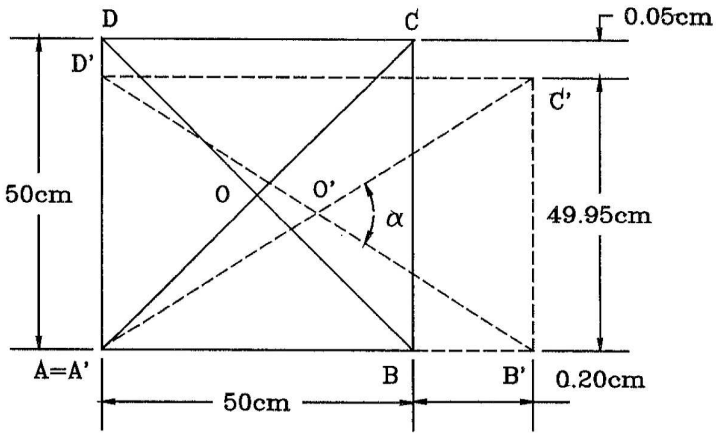


Figura 2.11 Ejemplo 2.6

2.5 Deformaciones y Desplazamientos

Expresaremos ahora la deformación normal (2.8) y la deformación tangencial (2.10) en términos de las componentes u, v y w del vector desplazamiento $\mathbf{s} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, Fig. 2.1, lo cual nos permitirá, en términos operacionales, evaluar las deformaciones en un punto cualquiera del sólido a partir del campo de desplazamientos.

En las deducciones que serán presentadas se supondrá que las deformaciones son *pequeñas*, lo cual es cierto en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería. Esto significa que tanto la deformación normal como la tangencial son mucho menores que la unidad. Las deformaciones usuales que experimentan los componentes de máquinas y de estructuras en su régimen normal de operación son del orden de 10^{-3}. Nuestra formulación estará entonces basada en este hecho, razón por la cual la teoría que presentaremos se conoce como teoría de las *deformaciones pequeñas, infinitesimales* o *ingenieriles*. En una sección posterior presentaremos definiciones más amplias para el caso general en el cual las deformaciones no son pequeñas, las cuales se denominan *deformaciones finitas*.

La Ec. (2.8) puede escribirse como

$$\varepsilon_n = \frac{|d\mathbf{R}|}{|d\mathbf{r}|} - 1 \qquad (2.11)$$

O bien

$$(\varepsilon_n+1)^2=\varepsilon_n^2+2\varepsilon_n+1=\frac{|d\mathbf{R}|^2}{|d\mathbf{r}|^2}$$

Suponiendo que las deformaciones son suficientemente pequeñas ($\varepsilon_n \ll 1$), se tiene que $\varepsilon_n^2 \approx 0$ y entonces podemos escribir

$$\varepsilon_n=\frac{1}{2}\left(\frac{|d\mathbf{R}|^2}{|d\mathbf{r}|^2}-1\right) \tag{2.12}$$

De la Fig. 2.1 se tiene que

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\mathbf{s} \tag{2.13}$$

Entonces

$$d\mathbf{R}=d\mathbf{r}+d\mathbf{s} \tag{2.14}$$

Calculando el cuadrado del módulo del vector $d\boldsymbol{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}|d\mathbf{R}|^2&=(d\mathbf{r}+d\mathbf{s})\circ(d\mathbf{r}+d\mathbf{s})\\&=d\mathbf{r}\circ d\mathbf{r}+2\,d\mathbf{r}\circ d\mathbf{s}+d\mathbf{s}\circ d\mathbf{s}\\&=|d\mathbf{r}|^2\left(1+2\frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|}\circ\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}+\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}\circ\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}\right)\end{aligned}$$

Usando la Ec. (2.6) obtenemos

$$\frac{|d\mathbf{R}|^2}{|d\mathbf{r}|^2}=1+2\,\mathbf{n}\circ\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}+\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}\circ\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|} \tag{2.15}$$

Luego

$$\varepsilon_n=\mathbf{n}\circ\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}+\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}\circ\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|} \tag{2.16}$$

Ahora bien,

$$d\mathbf{s}=\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial x}dx+\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial y}dy+\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial z}dz \tag{2.17}$$

En términos de sus componentes cartesianas, la Ec. (2.6) puede escribirse como

$$dx=|d\mathbf{r}|\,n_x,\qquad dy=|d\mathbf{r}|\,n_y,\qquad dz=|d\mathbf{r}|\,n_z \tag{2.18}$$

donde $n_x=\cos\alpha$, $n_y=\cos\beta$ y $n_z=\cos\gamma$ son los cosenos directores del vector **n**, siendo α, β y γ los ángulos que forma el vector **n** con los ejes x, y y z, respectivamente.

Entonces, dividiendo ambos miembros de la Ec. (2.17) por $|d\mathbf{r}|$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}&=n_x\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial x}+n_y\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial y}+n_z\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial z}\\&=\left(n_x\frac{\partial u}{\partial x}+n_y\frac{\partial u}{\partial y}+n_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(n_x\frac{\partial v}{\partial x}+n_y\frac{\partial v}{\partial y}+n_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathbf{j}\\&\quad+\left(n_x\frac{\partial w}{\partial x}+n_y\frac{\partial w}{\partial y}+n_z\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{2.19}$$

Considerando de nuevo que las deformaciones son pequeñas, los desplazamientos varían muy poco con respecto a las coordenadas, de manera que las derivadas de cada uno de los desplazamientos u, v y z con respecto a x, y y z son mucho menores que la unidad, pudiendo despreciarse los cuadrados y los productos de las derivadas. De aquí se concluye que

$$\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}\circ\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|}\approx 0$$

y

$$\varepsilon_n=\mathbf{n}\circ\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|} \tag{2.20}$$

Sustituyendo (2.19) en (2.20) y efectuando el producto escalar se obtiene finalmente

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + 2(\gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \gamma_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + \gamma_{yz}\cos\beta\cos\gamma) \tag{2.21}$$

donde

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.22a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.22b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.22c}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.22d}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2.22e}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{2.22f}$$

son las componentes de la *matriz de deformaciones*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Esta matriz es simétrica y, como veremos más adelante, sus componentes tienen un significado geométrico bien definido.

La Ec. (2.21) puede ahora escribirse en forma matricial como

$$\varepsilon_n = \mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \tag{2.24}$$

Nótese la analogía entre la Ec. (2.21) y la Ec. (1.19) del Cap. 1.

Considérese ahora la definición de deformación tangencial dada por la Ec. (2.10). Como estamos considerando pequeñas deformaciones, esta ecuación puede escribirse como

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{2}(\pi/2 - \theta) \approx \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = \frac{1}{2}\cos\theta \tag{2.25}$$

De la Fig. (2.9) y usando la definición del producto escalar de dos vectores

$$d\mathbf{R} \circ d\mathbf{Q} = |d\mathbf{R}||d\mathbf{Q}|\cos\theta$$

resulta que

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{R} \circ d\mathbf{Q}}{|d\mathbf{R}||d\mathbf{Q}|} = \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{R}}{|d\mathbf{R}|} \circ \frac{d\mathbf{Q}}{|d\mathbf{Q}|} \tag{2.26}$$

De las Ecs. (2.14), (2.9a) y (2.19) se tiene

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} &= d\mathbf{r} + d\mathbf{s} \\ &= |d\mathbf{r}|\,\mathbf{n} + |d\mathbf{r}|\left(n_x\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + n_y\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + n_z\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

O bien

$$\frac{d\mathbf{R}}{|d\mathbf{r}|} = \mathbf{n} + n_x\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + n_y\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + n_z\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \tag{2.27}$$

Como estamos considerando que las deformaciones son pequeñas, entonces $|d\mathbf{R}| \approx |d\mathbf{r}|$ y podemos escribir

$$\frac{d\mathbf{R}}{|d\mathbf{R}|} = \mathbf{n} + n_x\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + n_y\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + n_z\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \tag{2.28a}$$

Análogamente,

$$\frac{d\mathbf{Q}}{|d\mathbf{Q}|} = \mathbf{m} + m_x\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + m_y\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + m_z\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \tag{2.28b}$$

Sustituyendo las Ecs. (2.28) en la Ec. (2.26), despreciando los productos de las derivadas de los desplazamientos, teniendo presente que $\boldsymbol{m} \circ \boldsymbol{n} = 0$ y utilizando las definiciones (2.22), obtenemos finalmente

$$\gamma_{nm} = n_x m_x \varepsilon_x + n_y m_y \varepsilon_y + n_z m_z \varepsilon_z + (n_x m_y + n_y m_x)\gamma_{xy} + \\ + (n_x m_z + n_z m_x)\gamma_{xz} + (n_y m_z + n_z m_y)\gamma_{yz} \tag{2.29}$$

En notación matricial

$$\gamma_{mn} = \mathbf{n}^T \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{m} \tag{2.30}$$

donde ε es la matriz de deformaciones.

Esta ecuación nos dice que, conocida la matriz de deformaciones en un punto dado, la deformación tangencial entre dos direcciones ortogonales cualesquiera **n** y **m** puede ser determinada en ese punto.

En resumen, dada la matriz de deformaciones ε, la deformación normal en cualquier dirección y la deformación tangencial entre dos direcciones ortogonales cualesquiera pueden ser determinadas. De esta manera se concluye que las seis componentes de la matriz de deformaciones caracterizan por completo el estado de deformaciones en un punto dado de un sólido. Las Ecs. (2.24) y (2.30) reciben el nombre de *ecuaciones de transformación*.

Ejemplo 2.7

Resolver las partes (b) y (c) del ejemplo 2.1 (pág. 119) usando las relaciones deformación-desplazamiento (2.22) y las ecuaciones de transformación (2.21) y (2.29).

Solución: En primer lugar evaluamos las componentes de la matriz de deformaciones. Usando las Ecs. (2.22) tenemos

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.002$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.003$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.002$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(0.003 + 0.001) = 0.002$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(0.0 + 0.0) = 0.0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(0.0 + 0.002) = 0.001$$

Sea **n** un vector unitario en la dirección del segmento $\overline{AB}$. Entonces

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{(200)^2 + (100)^2}}(-200\mathbf{j} - 100\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Aplicando la Ec. (2.21) obtenemos

$$\varepsilon_n = (0.003)(4/5) + (0.002)(1/5) + 2(0.001)(2/5) = 0.0036$$

De aquí se concluye que

$$\Delta L_{AB} = \varepsilon_n |\overline{AB}| = (0.0036)(100\sqrt{5}\,\text{mm}) = 0.8\,\text{mm}$$

Para calcular la variación del ángulo inicialmente recto entre $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, construimos dos vectores unitarios **n** y **m** en las direcciones de estos segmentos. Es decir

$$\mathbf{n} = \frac{1}{100\sqrt{3}}(100\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{100\sqrt{2}}(100\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

Luego, usando la Ec. (2.29), obtenemos

$$\gamma_{mn} = (1/\sqrt{6})(0.002) + (-1/\sqrt{6})(0.003) + (0)(0.002) + \\ + (-1/\sqrt{6} + 1/\sqrt{6})(0.002) + (0 - 1/\sqrt{6})(0) + (0 - 1/\sqrt{6})(0.001) \\ = -0.000816$$

Dado que $\gamma_{mn} = \frac{1}{2}(\pi/2 - \theta')$, entonces el ángulo en la configuración deformada es

$$\theta' = \pi/2 - 2\gamma_{mn} = 1.5724\,\text{rad} = 90.0936°$$

De aquí se concluye que $\Delta\theta = 0.0936°$.

Ejemplo 2.8

En la Fig. 2.12 se muestra una barra recta de sección transversal circular sometida a la acción de un par de momentos T, de igual dirección y de sentidos opuestos, en cada uno de sus extremos. Experimentalmente puede comprobarse que las generatrices del cilindro se deforman en curvas helicoidales, mientras que la longitud y el diámetro de la barra no experimentan variación alguna en sus dimensiones. El efecto global de los momentos aplicados puede analizarse considerando que cada sección transversal de la barra gira con respecto a su eje un ángulo genérico θ, manteniéndose plana aún después de la deformación.

Considerando que las deformaciones son pequeñas y que, por lo tanto, puede suponerse que el ángulo θ varía linealmente desde $\theta = 0$ en el extremo $z = 0$ (considerado fijo para efectos del análisis) hasta una valor máximo $\theta = \alpha$ en el extremo $z = L$, determinar la matriz de deformaciones en un punto genérico de la barra.

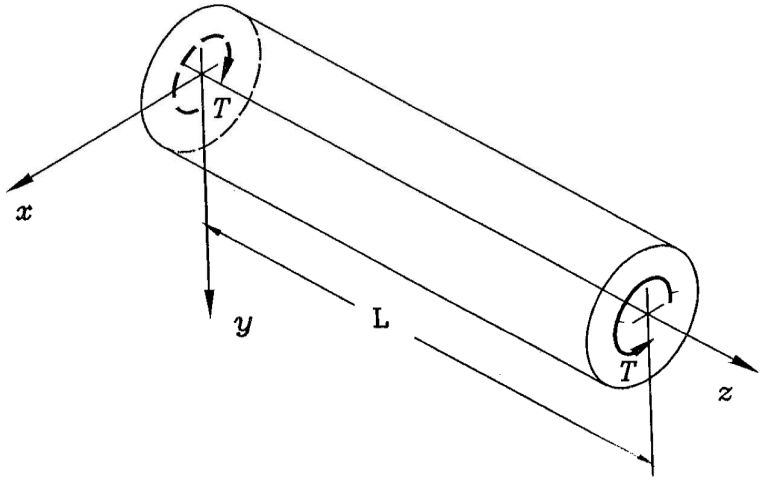


Figura 2.12 Barra de sección circular sometida a torsión, ejemplo 2.8.

Solución: Consideremos una sección genérica de la barra ubicada a una distancia z del extremo fijo. Por efecto del momento torsor T, esta sección experimentará una rotación θ. Debido a que la sección rota manteniéndose plana, un punto genérico $P(x,y,z)$ ubicado sobre esta sección experimentará sendos desplazamientos u y v en las direcciones x y y, como se muestra en la Fig. 2.13, siendo nulo el desplazamiento w del punto en la dirección del eje z.

Dado que el radio de la barra no varía, resulta razonable suponer que el punto P, ubicado a una distancia r del eje de la barra, se desplaza sobre un arco de circunferencia de radio r (ver Fig. 2.13). Luego los desplazamientos del punto P pueden expresarse como

$$\begin{aligned} u &= r\cos(\beta+\theta) - r\cos\beta \\ v &= r\,\text{sen}(\beta+\theta) - r\,\text{sen}\,\beta \\ w &\equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

donde β es el ángulo que forma el radio r con el eje x

Aplicando ahora las fórmulas del seno y coseno de la suma de dos ángulos, obtenemos

$$\begin{aligned} u &= r\cos\beta\cos\theta - r\,\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\theta - r\cos\beta \\ v &= r\,\text{sen}\,\beta\cos\theta + r\cos\beta\,\text{sen}\,\theta - r\,\text{sen}\,\beta \\ w &\equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

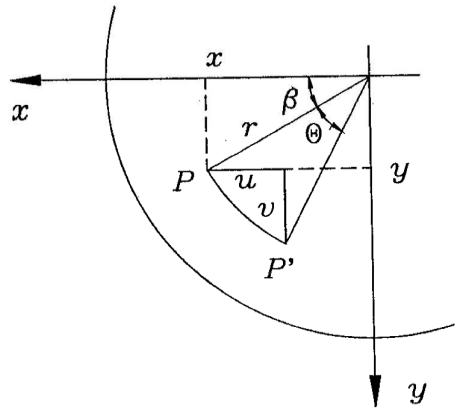


Figura 2.13 Desplazamientos de un punto $P(x,y)$ de la sección transversal, ejemplo 2.8.

Considerando que los desplazamientos son pequeños y que, por lo tanto, $\cos\theta \approx 1$ y $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, tenemos

$$u = r\cos\beta - \theta r \operatorname{sen}\beta - r\cos\beta = -\theta r \operatorname{sen}\beta$$
$$v = r\operatorname{sen}\beta + \theta r\cos\beta - r\operatorname{sen}\beta = \theta r\cos\beta$$
$$w \equiv 0$$

Es decir

$$u = -\theta y$$
$$v = \theta x \qquad (c)$$
$$w \equiv 0$$

Como las deformaciones son pequeñas, puede suponerse que el ángulo θ varía linealmente desde $\theta = 0$ en el extremo fijo $z = 0$ hasta una valor máximo $\theta = \alpha$ en el extremo $z = L$. Entonces

$$\theta = \theta(z) = \frac{\alpha}{L} z \qquad (d)$$

Luego

$$u = -(\alpha / L) yz$$
$$v = (\alpha / L) xz \qquad (e)$$
$$w \equiv 0$$

Usando ahora las relaciones deformación-desplazamiento (2.22), obtenemos las componentes de la matriz de deformaciones

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{L} z + \frac{\alpha}{L} z\right) = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\alpha}{2L} y$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\alpha}{2L} x$$

Luego

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\alpha/2L)y \\ 0 & 0 & (\alpha/2L)x \\ -(\alpha/2L)y & (\alpha/2L)x & 0 \end{bmatrix} \qquad (f)$$

Nótese que, al ser nulas las tres deformaciones normales, se comprueba que ni la longitud ni el diámetro del cilindro varían, tal como se había supuesto.

2.6 Interpretación Geométrica de las Componentes de la Matriz de Deformaciones

Dada la significación que en nuestro estudio tiene la matriz de deformaciones, ahora se buscará la interpretación geométrica de cada una de sus componentes. Por ejemplo, si en la configuración indeformada del sólido (Fig. 2.2) escogemos un segmento PQ en la dirección del eje x, entonces $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ y $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$. Aplicando la Ec. (2.21) tendríamos que $\varepsilon_n = \varepsilon_x$. Es decir, la componente ε_x mide la deformación normal de un segmento que inicialmente tiene la dirección del eje x. Interpretaciones similares pueden darse para ε_y y ε_z. Considérese ahora dos segmentos ortogonales PA y PB (Fig. 2.9) con una orientación tal que PA tiene la dirección del eje x y PB la dirección del eje y. Entonces los vectores unitarios en la dirección de estos segmentos son $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{m} = \mathbf{j}$, por lo que $n_x = 1$, $n_y = n_z = 0$ y $m_y = 1$, $m_x = m_z = 0$. Luego, usando la Ec. (2.29), tendríamos que $\gamma_{mn} = \gamma_{xy}$. Es decir, la componente γ_{xy} mide la deformación tangencial entre dos segmentos ortogonales que

inicialmente tienen la dirección de los ejes x y y. Interpretaciones similares pueden darse para γ_{xz} y γ_{yz}.

Para hacer aún más evidente este significado geométrico de las componentes de la matriz de deformaciones y relacionarlas a su vez con su definición en términos de las derivadas de los desplazamientos, vamos a considerar un sólido que experimenta un campo de desplazamientos en el plano xy definido por

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y), \qquad w \equiv 0$$

En la Fig. 2.14 se han representado dos segmentos PA y PB del sólido inicialmente paralelos a los ejes x y y, respectivamente. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ los desplazamientos horizontal y vertical del punto $P(x, y)$. Los desplazamientos del punto A, el cual se encuentra a una distancia infinitesimal dx del punto P, pueden expresarse como $u+du$ y $v+dv$. Siendo u y v funciones de dos variables, sus diferenciales vienen dados por

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \end{aligned} \tag{2.31}$$

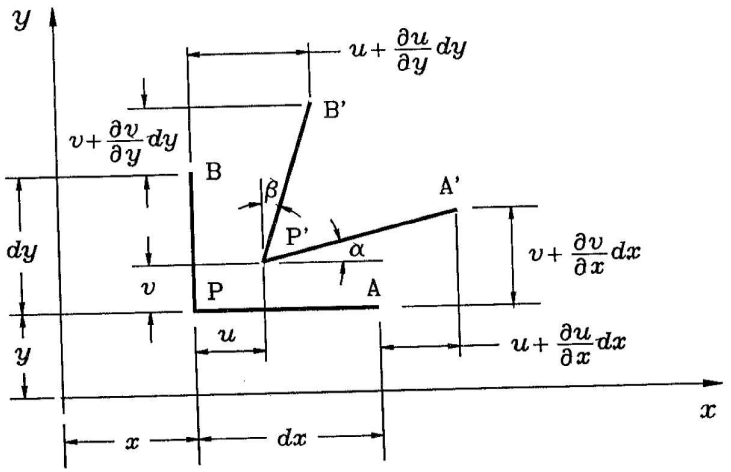


Figura 2.14 Interpretación geométrica de las componentes de la matriz de deformaciones.

Para el punto A, sin embargo, $dy = 0$; luego sus desplazamientos son

$$\begin{aligned} u_A &= u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx \\ v_A &= v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x}dx \end{aligned} \tag{2.32}$$

Análogamente, el punto B se encuentra a una distancia infinitesimal dy del punto P, luego $dx = 0$ y sus desplazamientos serán

$$\begin{aligned} u_B &= u + du = u + \frac{\partial u}{\partial y}dy \\ v_B &= v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial y}dy \end{aligned} \tag{2.33}$$

Debido a que los desplazamientos de los puntos P, A y B son diferentes, los segmentos infinitesimales PA y PB se desplazan, rotan y se deforman longitudinalmente. Suponiendo que los desplazamientos son pequeños, el ángulo α puede despreciarse a los efectos de calcular la longitud final del segmento $\overline{PA}$ (ver Fig. 2.14). Entonces

$$\overline{P'A'} = dx + (u + \frac{\partial u}{\partial x}dx) - u = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

Análogamente, la longitud del segmento $\overline{PB}$ puede calcularse como

$$\overline{P'B'} = dy + (v + \frac{\partial v}{\partial y}dy) - v = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

Las deformaciones normales de estos segmentos serán entonces, de acuerdo con la definición (2.8),

$$\varepsilon_{PA} = \frac{\overline{P'A'} - \overline{PA}}{\overline{PA}} = \frac{(1 + \frac{\partial u}{\partial x})dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{PB} \quad \frac{\overline{P'B'} \quad \overline{PB}}{\overline{PB}} \quad \frac{(1 + \frac{\partial v}{\partial y})dy - dy}{dy} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_y$$

lo cual corrobora la interpretación geométrica dada anteriormente para las componentes de deformación normal de la matriz de deformaciones.

Calculemos ahora la variación $\alpha+\beta$ del ángulo inicialmente recto PAB en la Fig. 2.14. De este figura tenemos que

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx) - v}{\overline{P'A'}} \approx \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\beta \approx \operatorname{tg}\beta = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y}dy) - u}{\overline{P'B'}} \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Aplicando la definición (2.10) tendremos entonces que la deformación tangencial entre los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ será igual a la mitad de la variación del ángulo inicialmente recto entre ellos; es decir

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \equiv \gamma_{xy}$$

lo cual corrobora también la interpretación geométrica dada anteriormente para las componentes de deformación tangencial de la matriz de deformaciones.

Ejemplo 2.9

Resolver el ejemplo 2.6 (pág. 133) usando las ecuaciones de transformación (2.21) y (2.29).

Solución: Suponiendo que el estado de deformaciones es idéntico en toda la placa[26], tenemos que

$$\varepsilon_x = \frac{|\overline{A'B'}| - |\overline{AB}|}{|\overline{AB}|} = \frac{0.20}{50} = 0.004$$

$$\varepsilon_y = \frac{|\overline{A'D'}| - |\overline{AD}|}{|\overline{AD}|} = \frac{-0.05}{50} = -0.001$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

[26] Es decir, que las componentes de la matriz de deformaciones no dependen de la posición.

a) Sea **n** un vector unitario en la dirección de la diagonal AC. Entonces

$$\mathbf{n} = \frac{1}{50\sqrt{2}}(50\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

Aplicando la Ec. (2.21) obtenemos

$$\varepsilon_n = (0.004)(1/\sqrt{2}) + (-0.001)(1/\sqrt{2}) = 0.0015$$

b) Sean **m** un vector unitario en la dirección de la diagonal $\overline{DB}$. Entonces

$$\mathbf{m} = \frac{1}{50\sqrt{2}}(50\mathbf{i} - 50\mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

Aplicando la Ec. (2.29), obtenemos la deformación tangencial entre los vectores **n** y **m**; esto es

$$\gamma_{mn} = (1/\sqrt{2})(0.004) + (-1/\sqrt{2})(-0.001) + (0)(0) + \\ + (-1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2})(0) + (0+0)(\gamma_{xz}) + (0+0)(\gamma_{yz})$$

$$= 0.0025$$

Ejemplo 2.10

La lámina de acero $ABCD$, de 200×200×5 mm, se deforma bajo la aplicación de un cierto sistema de cargas hasta llegar a la configuración $A'B'C'D'$ mostrada con líneas de trazos en la Fig. 2.15. Suponiendo que el estado de deformaciones es idéntico en cada punto de la lámina, determinar las componentes de la matriz de deformación en el plano xy. Las dimensiones y los desplazamientos de los diversos puntos mostrados en la Fig. 2.15 están dados en mm.

Solución: Las deformaciones normales según las direcciones x y y pueden evaluarse de varias maneras debido a que el estado de deformaciones es idéntico en cada punto de la lámina. Por ejemplo, la deformación normal ε_x puede determinarse a partir de las variaciones de longitud de los segmentos AB o CD. En el primer caso tendríamos, de acuerdo con la definición (2.8), que

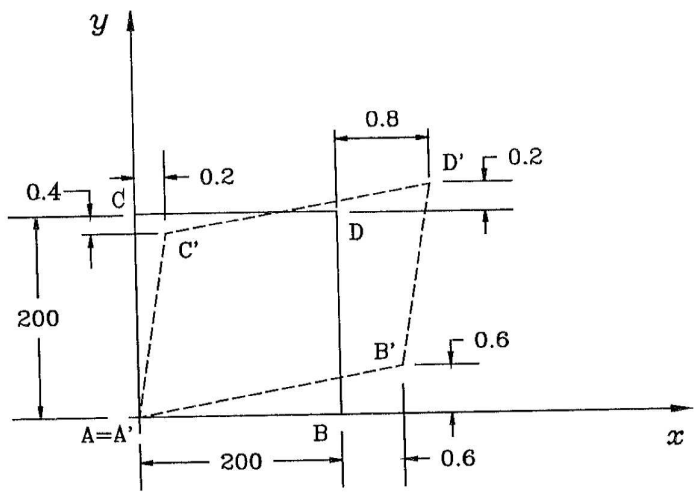


Figura 2.15 Lámina deformada del ejemplo 2.10

$$\varepsilon_x = \frac{\sqrt{(200.6)^2 + (0.6)^2} - 200}{200} = \frac{0.6009}{200} = 0.003$$

Como el ángulo que forma el segmento AB con la horizontal es muy pequeño, esta deformación podría también ser calculada simplemente a través de la proyección de su longitud final en la dirección del eje x. En efecto

$$\varepsilon_x = \frac{200.6 - 200}{200} = \frac{0.6}{200} = 0.003$$

El cálculo de ε_x en base a la variación de longitud del segmento $\overline{CD}$ se lleva a cabo determinando el desplazamiento relativo horizontal entre sus extremos. Tenemos así que

$$\varepsilon_x = \frac{0.8 - 0.2}{200} = 0.003$$

De la misma manera, la deformación normal ε_y puede determinarse a partir de las variaciones de longitud de los segmentos $\overline{AC}$ o BD. En el primer caso tendríamos

$$\varepsilon_y = \frac{-0.4}{200} = -0.002$$

y en el segundo caso

$$\varepsilon_y = \frac{0.2 - 0.6}{200} = -0.002$$

La deformación tangencial γ_{xy} viene dada, de acuerdo con la Ec. (2.10), como la mitad de la variación del ángulo inicialmente recto BAC. Como esta variación es pequeña, puede calcularse aproximadamente como

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{0.6}{200} + \frac{0.2}{200}\right) = 0.002$$

Obsérvese que, en este caso, la deformación γ_{xy} es positiva porque el ángulo recto BAC se transforma en el ángulo agudo $B'A'C'$.

2.7 Deformación Homogénea

Cuando la matriz de deformaciones es idéntica en todos los puntos de un sólido, se dice que el estado de deformaciones es *homogéneo*. Como veremos enseguida, en este caso el campo de desplazamientos tiene una estructura bien definida. En efecto, suponiendo que las componentes de la matriz de deformaciones son constantes e independientes de la posición, para las deformaciones normales se tiene que

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = A$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = B$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = C$$

donde A, B y C son constantes.

Integrando estas ecuaciones tenemos

$$u = Ax + f(y,z) \tag{a}$$

$$v = By + g(x,z) \tag{b}$$

$$w = Cz + h(x,y) \tag{c}$$

donde $f(y,z)$, $g(x,z)$ y $h(x,y)$ son funciones desconocidas.

Por otra parte, las deformaciones tangenciales serían

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = A' \tag{d}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = B' \tag{e}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = C' \tag{f}$$

donde A', B' y C' son también constantes.

Sustituyendo las Ecs. (a) y (b) en la Ec. (d) tenemos

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} + \frac{\partial g(x,z)}{\partial x}\right] = A'$$

Esta ecuación implica que tanto $\partial f/\partial y$ como $\partial g/\partial x$ tienen que ser constantes. En efecto, si se produce, por ejemplo, una variación en x manteniendo y constante, $\partial g/\partial x$ variaría mientras que $\partial f/\partial y$ se mantendría constante; la suma $\partial f/\partial y + \partial g/\partial x$ variaría, lo cual se contradice con la hipótesis de que es una constante. Luego $\partial f/\partial y$ y $\partial g/\partial x$ tienen que ser constantes, siendo su suma igual a $2A'$. Sea entonces

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = D, \qquad \frac{\partial g(x,z)}{\partial x} = E$$

donde D y E son constantes tales que $D + E = 2A'$. Integrando ambas expresiones obtenemos

$$f(y,z) = Dy + \phi(z) \tag{g}$$

$$g(x,z) = Ex + \varphi(z) \tag{h}$$

donde $\phi(z)$ y $\varphi(z)$ son ambas funciones desconocidas de z.

Sustituyendo ahora ahora las Ecs. (a), (c) y (g) en la Ec. (e) obtenemos que la deformación tangencial γ_{xz} es

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left[\phi'(z) + \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right] = B'$$

Por un razonamiento similar al de antes, se concluye que tanto $\phi'(z)$ como $\partial h/\partial x$ tienen que ser constantes. Entonces

$$\phi'(z) = F, \qquad \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = G$$

donde F y G son constantes tales que $F + G = 2B'$.

Integrando se tiene

$$\phi(z) = Fz + H \tag{i}$$

$$h(x,y) = Gx + \psi(y) \tag{j}$$

donde H es una constante y $\psi(y)$ es una función.

Por último, sustituyendo las Ecs. (b), (c), (h) y (j) en la Ec. (f) se tiene

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left[\varphi'(z) + \psi'(y)\right] = C'$$

De esta ecuación se concluye de nuevo que tanto $\varphi'(z)$ como $\psi'(y)$ tiene que ser constantes. Entonces

$$\varphi'(z) = K, \qquad \psi'(y) = L$$

donde K y L son constantes tales que $K + L = 2C'$.

Luego

$$\varphi(z) = Kz + M \tag{k}$$

$$\psi(y) = Ly + N \tag{l}$$

donde M y N son constantes.

Sustituyendo las Ecs. (g), (h), (i), (j), (k) y (l) en las expresiones (a), (b) y (c) obtenemos finalmente

$$u = Ax + Dy + Fz + H$$
$$v = Ex + By + Kz + M \qquad (2.34)$$
$$w = Gx + Ly + Cz + N$$

Hemos demostrado así que si un campo de deformaciones es homogéneo, entonces los desplazamientos u, v y w son funciones lineales de las coordenadas x, y, z. Inversamente, se puede comprobar muy fácilmente que si un campo de desplazamientos es lineal, entonces el estado de deformaciones es homogéneo.

Ejemplo 2.11

Resolver el ejemplo 2.10 usando las ecuaciones deformación desplazamiento (2.22).

Solución: Tomando en cuenta que el campo de deformaciones es homogéneo y que se trata de un problema bidimensional donde no interviene la coordenada z, se puede suponer que

$$u(x, y) = ax + by + c$$
$$v(x, y) = dx + ey + f$$

Para determinar las constantes a, b, c, d, e y f, aplicamos estas ecuaciones a los desplazamientos conocidos de varios puntos de la lámina $ABCD$ de la Fig. 2.15.

Para el punto $A(0,0)$ tenemos

$$u(0,0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$
$$v(0,0) = d \cdot 0 + e \cdot 0 + f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

Para el punto $B(200,0)$

$$u(200,0) = a \cdot 200 + b \cdot 0 + 0 = 0.6 \quad \Rightarrow \quad a = 0.003$$
$$v(200,0) = d \cdot 200 + e \cdot 0 + 0 = 0.6 \quad \Rightarrow \quad d = 0.003$$

Para el punto $C(0,200)$

$$u(0,200) = a \cdot 0 + b \cdot 200 + 0 = 0.2 \quad \Rightarrow \quad b = 0.001$$
$$v(0,200) = d \cdot 0 + e \cdot 200 + 0 = -0.4 \quad \Rightarrow \quad e = -0.002$$

Entonces el campo de desplazamientos viene dado por

$$u(x, y) = 0.003x + 0.001y$$
$$v(x, y) = 0.003x - 0.002y$$

y las deformaciones valen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.003$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -0.002$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(0.001 + 0.003) = 0.002$$

A pesar de que no fue necesario considerar los desplazamientos del punto D para obtener las funciones u y v, puede comprobarse que las ecuaciones obtenidas satisfacen las condiciones para este punto. En efecto

$$u(200, 200) = (0.003)(200) + (0.001)(200) = 0.8\text{mm}$$
$$v(200,200) = (0.003)(200) - (0.002)(200) = 0.2\text{mm}$$

Ejemplo 2.12

La lámina de acero $ABCD$, de 4×2 cm, se deforma hasta llegar a la configuración $A'B'C'D'$ mostrada con líneas de trazos en la Fig. 2.16. Como puede observarse, el campo de deformaciones en este caso no es homogéneo. Suponiendo que las líneas rectas permanecen rectas aún después del proceso de deformación, determinar entonces las deformaciones ε_x, ε_y y γ_{xy} en los puntos A, B, C, D y E.

Solución: Como el estado de deformaciones no es homogéneo, no se puede asumir un campo de desplazamientos lineal. El lector puede comprobar que si se supone una relación lineal entre los desplazamientos y las coordenadas, se

podrían obtener varios resultados diferentes y, entre ellos, el resultado absurdo $u = v = 0$ en todo punto de la lámina.

Ahora bien, al suponer que las líneas rectas permanecen rectas aún después del proceso de deformación (ver Fig. 2.17), se llega a la conclusión de que el campo de desplazamientos no puede contener términos en x o y de grado mayor que uno.

En la Fig. 2.16 se observa que la deformación normal ε_x varía linealmente con la coordenada y, mientras que la deformación ε_y varía linealmente con x. Es decir

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = Ay$$

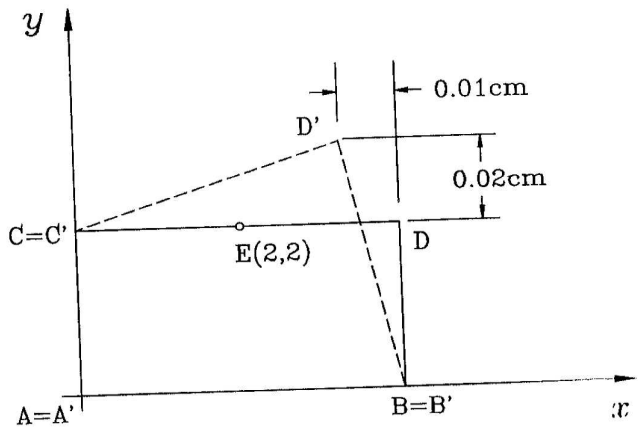
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = Bx$$

donde A y B son constantes. Integrando estas ecuaciones obtenemos

$$u(x, y) = Axy + f(y)$$

$$v(x, y) = Bxy + g(x)$$

donde $f(y)$ y $g(x)$ son funciones desconocidas de y y de x, respectivamente. De aquí concluimos que tanto u como v contienen términos de la forma xy.



Supongamos entonces que las funciones u y v son polinomios de la forma

$$u(x, y) = a + bx + cy + dxy$$

$$v(x, y) = e + fx + gy + hxy$$

y apliquemos las condiciones para los desplazamientos en los cuatro vértices de la lámina.

Para el punto $A(0,0)$

$$u(0,0) = a + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$
$$v(0,0) = e + f \cdot 0 + g \cdot 0 + h \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$$

Para el punto $B(4,0)$

$$u(4,0) = 0 + b \cdot 4 + c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$
$$v(4,0) = 0 + f \cdot 4 + g \cdot 0 + h \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

Para el punto $C(0,2)$

$$u(0,2) = 0 + b \cdot 0 + c \cdot 2 + d \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$
$$v(0,2) = 0 + f \cdot 0 + g \cdot 2 + h \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0$$

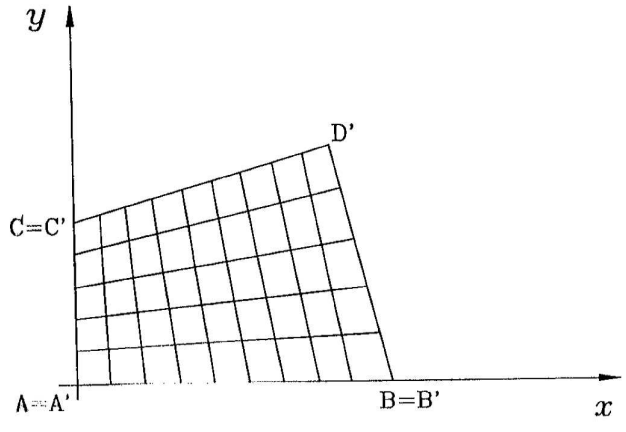


Figura 2.17 Ejemplo 2.12

Para el punto $D(4,2)$

$$u(4,2) = 0 + 0\cdot 4 + 0\cdot 2 + d\cdot 4\cdot 2 = -0.01 \quad \Rightarrow \quad d = -0.00125$$
$$v(4,2) = 0 + 0\cdot 4 + 0\cdot 2 + h\cdot 4\cdot 2 = 0.02 \quad \Rightarrow \quad e = 0.00250$$

Entonces

$$u(x,y) = -0.00125xy$$
$$v(x,y) = 0.0025xy$$

y, en consecuencia,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -0.00125y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.0025x$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(-0.00125x + 0.0025y)$$

Las deformaciones en los puntos A, B, C, D y E se muestran en la Tabla 2.1.

Como ejercicio, el lector debería examinar estos resultados y confrontarlos con la Fig. 2.16.

Tabla 2.1 Deformaciones en diferentes puntos de la lámina del ejemplo 2.12

Punto	ε_x	ε_y	γ_{xy}
$A(0,0)$	0.0000	0.0000	0.00000
$B(4,0)$	0.0000	0.0100	-0.00250
$C(0,2)$	-0.0025	0.0000	0.00250
$D(4,2)$	-0.0025	0.0100	0.00000
$E(2,2)$	-0.0025	0.0050	0.00125

Ejemplo 2.13

La lámina de acero ABC se deforma hasta llegar a la configuración $A'B'C'$ mostrada con líneas de trazos en la Fig. 2.18. Determinar las deformaciones ε_x, ε_y y γ_{xy} suponiendo que las líneas rectas se mantienen rectas aún después del proceso de deformación.

Solución: En este ejemplo no es sencillo determinar a priori si se trata o no de un campo de deformaciones homogéneo. En caso de que no sea homogéneo, las deformaciones variarían a lo sumo linealmente con las coordenadas puesto que los lados del triángulo se mantienen rectos y, al igual que en el ejemplo anterior, se supone que las líneas rectas se mantienen rectas aún después del proceso de deformación.

Supongamos entonces, como en el ejemplo 2.12, que

$$u(x,y) = a + bx + cy + dxy$$
$$v(x,y) = e + fx + gy + hxy$$

y apliquemos las condiciones para los desplazamientos en los tres vértices de la lámina.

Para el punto $A(0,0)$

$$u(0,0) = a + b\cdot 0 + c\cdot 0 + d\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$
$$v(0,0) = e + f\cdot 0 + g\cdot 0 + h\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$$

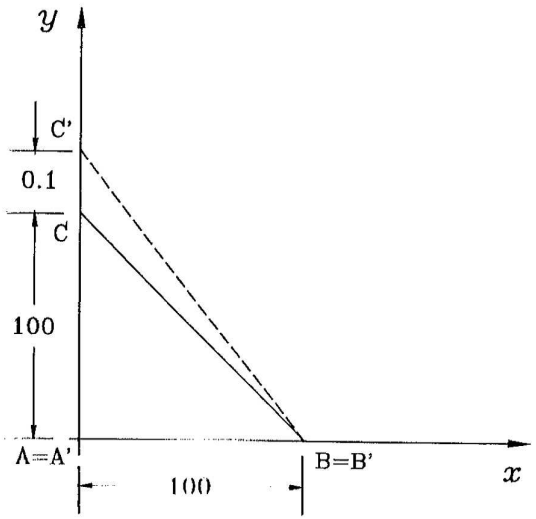


Figura 2.18 Lámina deformada del ejemplo 2.13

Para el punto $B(100,0)$

$$u(100,0) = 0 + b\cdot 100 + c\cdot 0 + d\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$
$$v(100,0) = 0 + f\cdot 100 + g\cdot 0 + h\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

Para el punto $C(0,100)$

$$u(0,100) = 0 + b\cdot 0 + c\cdot 100 + d\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$
$$v(0,100) = 0 + f\cdot 0 + g\cdot 100 + h\cdot 0 = 0.1 \quad \Rightarrow \quad g = 0.001$$

Para determinar las constantes d y h necesitamos tomar otro punto. Para mayor generalidad, consideremos un punto genérico P de coordenadas (x, y) sobre la recta BC, Fig. 2.19. La ecuación de esta recta en la configuración inicial es

$$y = -x + 100 \tag{a}$$

mientras que en la configuración deformada la recta se transforma en

$$y = -1.001x + 100.1 \tag{b}$$

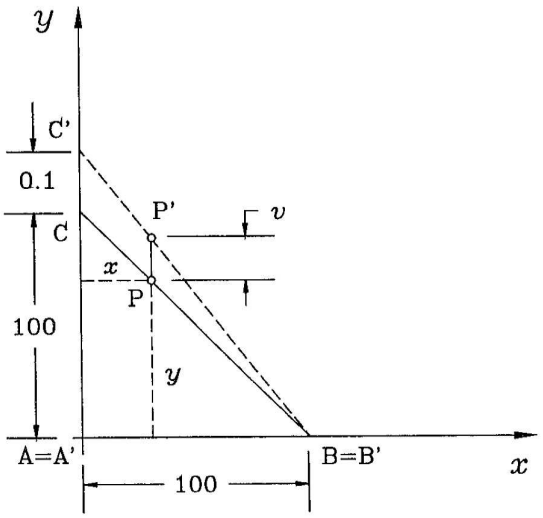


Figura 2.19 Desplazamientos de un punto genérico sobre la recta BC, ejemplo 2.13

Los puntos situados sobre esta recta se desplazan verticalmente en una cantidad que es igual a la diferencia de los valores dados por las ecuaciones (b) menos (a), por lo que sus desplazamientos u y v serán (ver Fig. 2.19)

$$u\big|_{y=-x+100} = 0$$
$$v\big|_{y=-x+100} = -1.001x + 100.1 - (-x + 100) = -0.001x + 0.1$$

Entonces

$$u(x,-x+100) = d\cdot x(-x+100) = 0$$
$$v(x,-x+100) = 0.001(-x+100) + h\cdot x(-x+100) = -0.001x + 0.1$$

de donde se concluye que $d = h = 0$. Entonces

$$u(x,y) = 0$$
$$v(x,y) = 0.001y$$

Luego el campo de deformaciones es homogéneo con $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = 0.001$ y $\gamma_{xy} = 0$.

2.8 Dilatación Volumétrica

Consideremos un paralelepípedo infinitesimal de lados dx, dy y dz, como se muestra en la Fig. 2.20. Sean

$$\overline{PA} = dx\mathbf{i}, \qquad \overline{PB} = dy\mathbf{j}, \qquad \overline{PC} = dz\mathbf{k}$$

los vectores que definen los lados del paralelepípedo en su configuración inicial indeformada. El volumen inicial del paralelepípedo viene dado por

$$dV = \overline{PA}\circ(\overline{PB}\times\overline{PC}) = dx\mathbf{i}\circ(dy\mathbf{j}\times dz\mathbf{k}) = dxdydz$$

Cuando el sólido se deforma, los puntos P, A, B y C pasan a ocupar las posiciones P', A', B' y C', respectivamente.

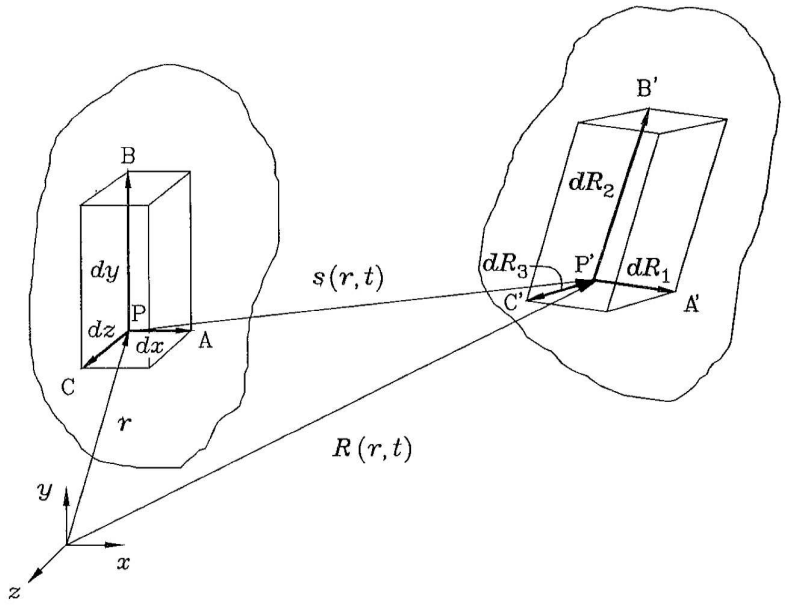


Figura 2.20 Dilatación volumétrica

Sean

$$P'A' = d\mathbf{R}_1, \qquad P'B' = d\mathbf{R}_2, \qquad P'C' = d\mathbf{R}_3$$

los vectores que definen los lados del paralelepípedo en su configuración deformada.

En general, cuando un sólido se deforma, un elemento diferencial $d\mathbf{r}$ que tiene la dirección del vector $\mathbf{n}$ se transforma, de acuerdo con la Ec. (2.27), en el vector

$$d\mathbf{R} = |d\mathbf{r}|\left(\mathbf{n} + n_x \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}\right)$$

En particular, si $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, entonces

$$d\mathbf{R}_1 = dx\left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x}\right)$$

Análogamente, para $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ y para $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, tendremos

$$d\mathbf{R}_2 = dy\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y}\right)$$

$$d\mathbf{R}_3 = dz\left(\mathbf{k} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}\right)$$

El volumen final del paralelepípedo será

$$dV' = d\mathbf{R}_1 \circ (d\mathbf{R}_2 \times d\mathbf{R}_3)$$

$$= dV\left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x}\right) \circ \left[\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y}\right) \times \left(\mathbf{k} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}\right)\right]$$

Considerando que las deformaciones son pequeñas, podemos despreciar los productos de las derivadas del vector desplazamiento $\mathbf{s}$. Luego

$$dV' = dV\left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x}\right) \circ \left(\mathbf{i} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} \times \mathbf{k}\right)$$

$$= dV\left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{k}\right] \circ \left[\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right]$$

$$= dV\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Usando las Ecs. (2.22) concluimos que

$$dV' = dV\left(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right) \tag{2.35}$$

Se denomina *dilatación volumétrica* κ al cambio de volumen por unidad de volumen. Es decir

$$\kappa = \frac{dV' - dV}{dV} \tag{2.36}$$

Luego

$$\kappa = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{2.37}$$

Nótese que, en general, la dilatación volumétrica es un campo escalar, pudiendo su valor variar de punto a punto dentro del sólido.

2.9 Estado Plano de Deformaciones

Desde un punto de vista matemático, existe una completa analogía entre los esfuerzos y las deformaciones. Bajo una rotación del sistema de coordenadas, la matriz de esfuerzos y la matriz de deformaciones se transforman siguiendo la misma ley. En efecto, en el Cap. 1 se demostró que, dada una rotación del sistema de coordenadas definida por la matriz A, la matriz de esfuerzos se transforma de acuerdo con la Ec. (1.25), pág. 23. Utilizando las definiciones establecidas en el presente capítulo para las deformaciones normal y tangencial, así como las Ecs. de transformación (2.24) y (2.30), el lector puede comprobar (ver problemas al final de este capítulo) que la matriz de deformaciones se transforma también siguiendo la ley[27]

$$\varepsilon' = \mathbf{A} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{A}^T \tag{2.38}$$

donde A es la matriz de rotación definida por la Ec. (1.23), pág. 22.

Como consecuencia de esta analogía, es posible también definir un sistema principal de coordenadas y manejar el concepto de deformaciones principales en un punto[28]. Se puede, además, trabajar gráficamente con círculos de Mohr para deformaciones y calcular la deformación tangencial máxima y la deformación cortante octaedral en un punto.

En este orden de ideas, y con la finalidad de captar con más precisión esta analogía entre los esfuerzos y las deformaciones, vamos justamente a estudiar ahora, dada su importancia, el caso particular de un estado plano de deformaciones.

Se dice que un estado de deformaciones es *plano* si una de las deformaciones principales es nula.

Supongamos, por ejemplo, que el eje z es la dirección principal según la cual la deformación principal correspondiente es nula[29]. Luego, como ε_z es una

[27] Como se dijo en el capítulo 1, esta ley de transformación es la que caracteriza a las matrices de esfuerzos y de deformaciones como tensores de segundo orden.

[28] Dependiendo de las relaciones que existan para un determinado material entre los esfuerzos y las deformaciones, ambos sistemas de ejes principales pueden o no coincidir.

[29] Al igual que con los esfuerzos, todas las ecuaciones y gráficos serán deducidos bajo esta suposición. Cuando el eje principal según el cual la deformación principal es nula coincida con un eje coordenado distinto al z, estas ecuaciones pueden seguir utilizándose siempre que se modifiquen mediante una permutación circular de los índices x, y, z.

deformación principal, se tiene que $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Por lo tanto, para un estado plano de deformaciones tenemos

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \tag{2.39}$$

De manera, pues, que un estado plano de deformaciones queda definido únicamente por las tres componentes ε_x, ε_y y γ_{xy}. La matriz de deformaciones es entonces

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Nos proponemos ahora resolver el siguiente problema: Conocido en un punto de un sólido el estado de deformaciones definido por ε_x, ε_y y γ_{xy}, ¿Cuánto valen la deformación normal ε_{x1} y la deformación tangencial γ_{x1y1} referidas a un sistema de ejes cartesianos $\{x_1, y_1, z_1\}$ como el mostrado en la Fig. 2.21?

Particularizando la Ec. (2.21) al caso plano para el cual

$$\alpha = \theta, \quad \beta = 90° - \theta, \quad \gamma = 90°$$

obtendríamos que la deformación normal ε_{x1} en la dirección del eje x_1 sería

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2\theta + 2\gamma_{xy} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \tag{2.41}$$

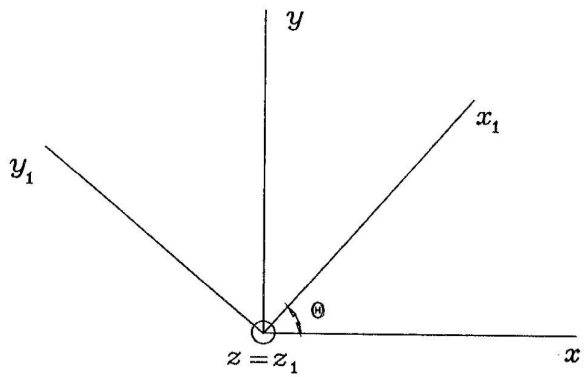


Figura 2.21 Transformación de coordenadas en un estado plano de deformaciones

De la misma manera, particularizando la Ec. (2.29) al caso para el cual

$$n_x = \cos\theta, \qquad n_y = \operatorname{sen}\theta, \qquad n_z = 0$$
$$m_x = -\operatorname{sen}\theta, \qquad m_y = \cos\theta, \qquad m_z = 0$$

se tiene que la deformación tangencial γ_{x1y1} entre los ejes x_1 y y_1 es

$$\gamma_{nm} = -\varepsilon_x \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \varepsilon_y \operatorname{sen}\theta\cos\theta + (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\gamma_{xy} \tag{2.42}$$

Expresando las Ecs. (2.41) y (2.42) en función del ángulo 2θ, por medio de las relaciones trigonométricas para el ángulo doble, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x1} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\theta + \gamma_{xy}\operatorname{sen}2\theta \\ \gamma_{x1y1} &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\operatorname{sen}2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta\end{aligned} \tag{2.43}$$

Obsérvese que estas ecuaciones son, en su forma, idénticas a las ecuaciones de transformación (1.65) deducidas en el Cap. 1 para un estado plano de esfuerzos.

Transfiriendo el término $\frac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$ al miembro de la izquierda en la primera de las Ecs. (2.43), elevando al cuadrado esta ecuación junto con la segunda, sumando miembro a miembro y simplificando términos, obtenemos

$$\left[\varepsilon_{x1} - \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]^2 + \gamma_{x1y1}^2 = \frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2 \tag{2.44}$$

Esta es la ecuación de una circunferencia en el plano cartesiano $\{\varepsilon, \gamma\}$ con centro en el punto

$$C = \left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}, 0\right) \tag{2.45}$$

y radio

$$R = \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{2.46}$$

y es la llamada circunferencia de Mohr de deformaciones.

Para construir esta circunferencia procedemos de una manera similar a la utilizada en el Cap. 1 para los esfuerzos. A tales efectos construimos un sistema de referencia $\{\varepsilon, \gamma\}$ y ubicamos sobre éste (ver Fig. 2.22) los puntos $P_x(\varepsilon_x, \gamma_{xy})$ y $P'_y(\varepsilon_y, -\gamma_{xy})$. Unimos estos dos puntos mediante el segmento de recta $P_xP'_y$; su intersección con el eje de las abscisas nos dará el centro $C[\frac{1}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y), 0]$ de la circunferencia P_1P_2. Con centro en el punto C y radio $\overline{CP_x} = \overline{CP_y}$ trazamos la circunferencia de Mohr. Las coordenadas del punto P_{x1} en el diagrama de Mohr son las componentes de deformación ε_{x1} y γ_{x1y1}, ubicándose este punto a un ángulo 2θ *en sentido horario* con respecto al radio $\overline{CP_x}$ si el eje x_1 forma un ángulo θ *en sentido antihorario* con el eje x.

Los puntos P_1 y P_2 en la circunferencia de Mohr (Fig. 2.22) corresponden a los valores máximo y mínimo de las deformaciones normales en el plano xy. Estas son, precisamente, dos de las deformaciones principales (¿por qué?) y las designaremos con ε_1^* y ε_2^*, respectivamente.

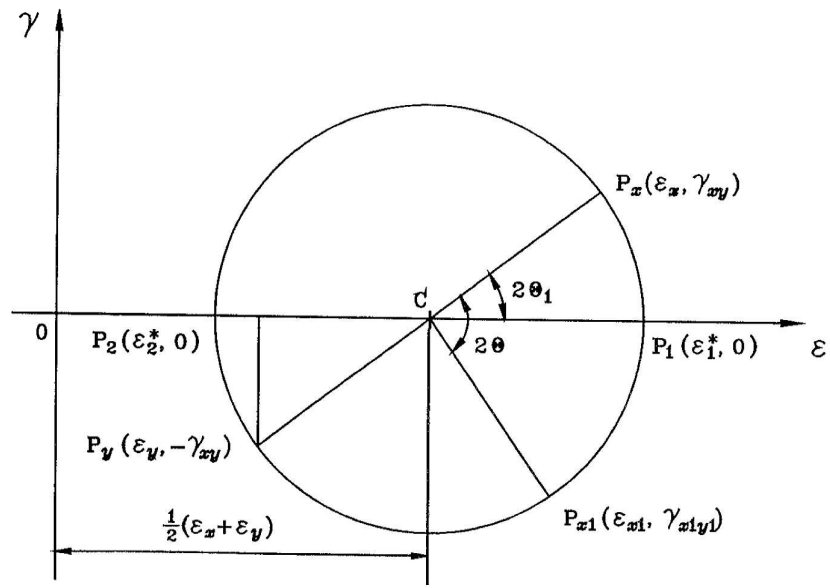


Figura 2.22 Diagrama de Mohr para un estado plano de deformaciones

Estas deformaciones principales ocurren cuando $\gamma_{x1y1} = 0$, es decir, cuando

$$-\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\operatorname{sen} 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta = 0$$

De aquí se deduce que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \tag{2.47}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$$

Utilizando la primera de las Ecs. (2.43) encontramos que para estos valores del ángulo θ las deformaciones normales son

$$\varepsilon^*_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma^2_{xy}} \tag{2.48}$$

Esta ecuación es también análoga a la Ec. (1.70) del Cap. 1 y sirve para evaluar dos de las tres deformaciones principales. Si el estado de deformaciones es *plano*, la tercera de las deformaciones principales es cero. Por el contrario, si el estado de deformaciones es *cuasiplano*[30], la Ec. (2.48) puede seguirse utilizando, pero la tercera deformación principal es diferente de cero.

La deformación tangencial máxima en el plano xy es

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{\varepsilon^*_1 - \varepsilon^*_2}{2}$$

Pero la deformación tangencial máxima absoluta es

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2} \tag{2.49}$$

[30] La definición de una estado cuasiplano de deformaciones es análoga a la definición establecida

donde ε_1 y ε_3 son las deformaciones principales mínima y máxima, respectivamente.

Ejemplo 2.14

Un estado plano de deformaciones está definido como se muestra en la Fig. 2.23. Determinar gráfica y analíticamente las deformaciones principales y la deformación tangencial máxima. Determinar también la matriz de deformaciones referida al sistema de coordenadas x_1 y_1.

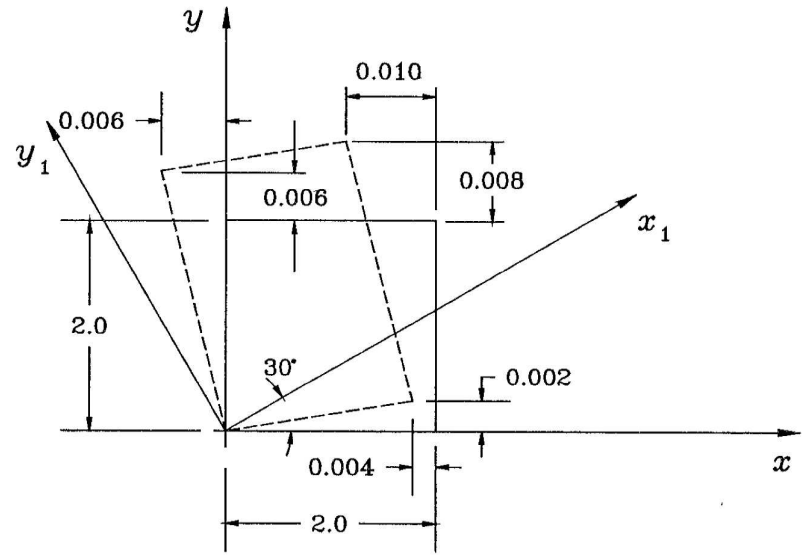


Figura 2.23 Estado de deformaciones del ejemplo 2.14

Solución: En este ejemplo resulta sencillo verificar que el estado de deformaciones es homogéneo. Entonces, usando la interpretación geométrica dada para las componentes de la matriz de deformaciones, tenemos

$$\varepsilon_x = \frac{-0.004}{2.0} = -0.002$$

$$\varepsilon_y = \frac{0.006}{2.0} = 0.003$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{0.002}{2.0} + \frac{-0.006}{2.0}\right) = -0.001$$

El diagrama de Mohr para este estado de deformaciones se muestra en la Fig. 2.24. Como se observa en el diagrama, las deformaciones principales valen $\varepsilon_3 = 0.0032$, $\varepsilon_2 = 0$ y $\varepsilon_1 = -0.0022$. La deformación tangencial máxima es $\gamma_{máx} = 0.0027$.

Para determinar las deformaciones referidas al sistema de coordenadas x_1y_1, trazamos el radio $\overline{CP_{x1}}$ a un ángulo $2\theta = 60°$ en sentido horario con respecto al radio $\overline{CP_x}$. Las deformaciones ε_{x1} y γ_{x1y1} son las coordenadas del punto P_{x1}. Entonces $\varepsilon_{x1} = -0.0016$ y $\gamma_{x1y1} = 0.0017$. La deformación $\varepsilon_{y1} = 0.0026$ se determina como la abscisa del punto que se encuentra a 180° del radio CP_{x1}.

En forma analítica tenemos

$$\varepsilon^*_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma^2_{xy}}$$
$$= 0.0005 \pm 0.0027$$
$$\Rightarrow \quad \varepsilon^*_1 = 0.0032, \qquad \varepsilon^*_2 = -0.0022$$

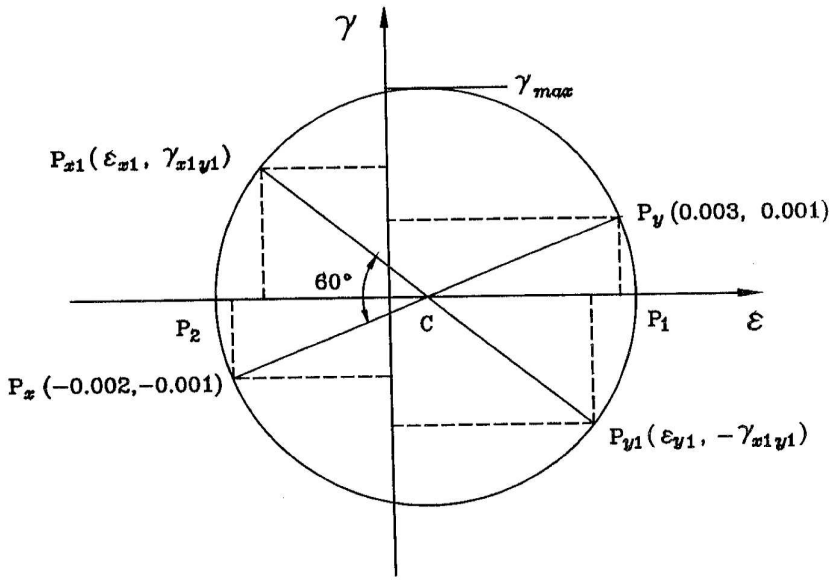


Figura 2.24 Diagrama de Mohr para el ejemplo 2.14

Esto significa que $\varepsilon_3 = 0.0032$, $\varepsilon_2 = 0$ y $\varepsilon_1 = -0.0022$. Luego

$$\gamma_{máx} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2} = \frac{0.0032 - (-0.0022)}{2} = 0.0027$$

Las componentes de la matriz de deformaciones referida al sistema de coordenadas x_1y_1 se obtienen por medio de las Ecs. (2.43). Entonces

$$\varepsilon_{x1} = \frac{1}{2}(-0.002 + 0.003) + \frac{1}{2}(-0.002 - 0.003)\cos 60° - 0.001 \operatorname{sen} 60°$$
$$= -0.0016$$

$$\gamma_{x1y1} = -\frac{1}{2}(-0.002 - 0.003)\operatorname{sen} 60° - 0.001\cos 60°$$
$$= 0.0017$$

$$\varepsilon_{y1} = \frac{1}{2}(-0.002 + 0.003) + \frac{1}{2}(-0.002 - 0.003)\cos 240° - 0.001 \operatorname{sen} 240°$$
$$= 0.0026$$

De manera que la nueva matriz de deformaciones es

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} -0.0016 & 0.0017 & 0 \\ 0.0017 & 0.0026 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.10 Análisis Experimental de Deformaciones

Como se ha dicho en reiteradas oportunidades, el objetivo básico que nos ocupa consiste en el establecimiento de relaciones de naturaleza cuantitativa que permitan predecir la respuesta de un sólido en términos de su resistencia mecánica, de su rigidez y de su estabilidad, cuando se le somete a un sistema de cargas externas.

Para establecer tales relaciones se ha comenzado por introducir los conceptos fundamentales asociados a las nociones de esfuerzo y deformación. De esta forma, hemos visto en el Cap. 1 que el estado de esfuerzos en un punto

queda completamente definido si se conoce la matriz de esfuerzos en ese punto, quedando claro que, una vez conocida esta matriz, será posible predecir, mediante el uso de las llamadas teorías de falla, si el sólido resistirá sin fallar las cargas externas aplicadas. De igual manera, hemos visto en este capítulo que si la matriz de deformaciones se conoce en un punto determinado, entonces el estado de deformaciones queda enteramente determinado en dicho punto.

Para evaluar la distribución de esfuerzos en un sólido existen muchos métodos analíticos que son aplicables con las limitaciones naturales impuestas por la complejidad de la geometría del cuerpo y del sistema de cargas aplicado. Con el advenimiento del computador digital, muchas de estas limitaciones han sido superadas mediante la utilización de métodos numéricos poderosos, tales como el Método del Elemento Finito, el Método de los Elementos de Frontera y los denominados Métodos sin Malla[31]. Sin embargo, hay ocasiones en las que el uso de algún método experimental para la evaluación de los esfuerzos es imprescindible. Este análisis experimental puede servir para complementar y/o verificar los resultados teóricos obtenidos mediante el uso de algún modelo matemático. En otros casos más críticos, sobretodo cuando la configuración geométrica del sólido o el sistema de cargas aplicado son muy complejos, las técnicas experi-mentales se utilizan para obtener resultados rápidos y confiables.

Una de las técnicas experimentales más comúnmente utilizadas se basa en la medición de las deformaciones en la superficie de la pieza en estudio, bien sea por medios mecánicos, ópticos o eléctricos. De ellos, el más utilizado es el medidor de deformación por *resistencia eléctrica*. El principio de operación de estos medidores se basa en el hecho de que la resistencia eléctrica de un material conductor de electricidad varía cuando se le somete a cargas. Una explicación parcial a este fenómeno se encuentra en el cambio de las dimensiones del conductor. El lector puede recordar de sus cursos de Física que la resistencia R de un conductor de longitud L, área transversal A y resistividad ρ puede expresarse como

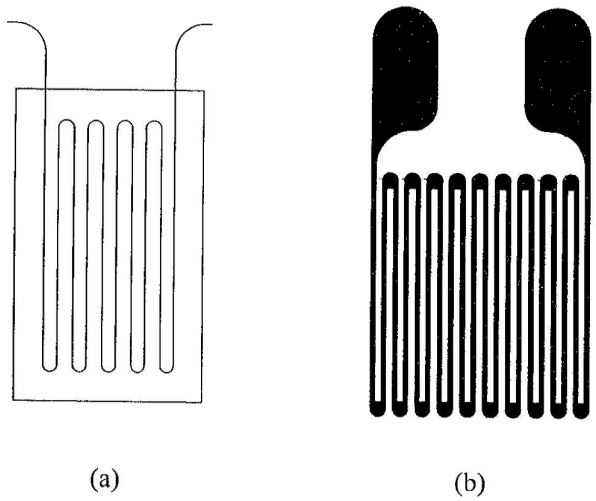
$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{2.50}$$

[31]Entre los numerosos libros que se han escrito sobre los dos primeros métodos, el lector puede tener una visión introductoria revisando el texto de T. Chandrupatla y A. Belegundu "*Introduction to Finite Elements in Engineering*", Segunda Edición, Prentice-Hall, 1997, y el libro de P. Kythe "*An Introduction to Boundary Element Methods*", CRC Press, 1995. Sobre los métodos sin malla se ha publicado recientemente el libro de G. R. Liu "Mesh Free Methods", CRC Press, 2003.

Cuando al conductor se le aplica una carga axial, su longitud L aumenta mientras que su área A disminuye. Experimentalmente se ha observado que ρ también varía.

El medidor de deformación por resistencia eléctrica, que funciona fundamentalmente según este principio, se adhiere o une íntimamente a la superficie del sólido y, por consiguiente, se deforma junto con éste. Al hacerse pasar una corriente eléctrica a través del conductor mientras se aplica el sistema de cargas a la pieza, la variación de la intensidad de la corriente puede determinarse (puesto que la resistencia R varía) y establecerse así una escala adecuada entre la intensidad de corriente y la variación de la longitud[32].

A los medidores de deformación por resistencia eléctrica se les da el nombre de *extensómetros*. Se construyen utilizando un alambre muy delgado (de aproximadamente 0.025 mm de diámetro) enrollado de tal forma que la mayor parte de su longitud se orienta en una dirección (ver Fig. 2.25a). Existen también los extensómetros de lámina, que tienen la misma configuración pero que se fabrican a partir de una hoja metálica muy delgada, de aproximadamente 0.005 mm de espesor (Fig. 2.25b). En ambos casos el conductor se adhiere a un papel o plástico delgado. Este papel o plástico es el que se pega firmemente a la superficie de la pieza sobre la cual se desean medir las deformaciones.



(a) (b)

Figura 2.25 Extensómetros de: a) alambre; b) lámina

[32]Para obtener información más detallada sobre los instrumentos que se utilizan en estas mediciones, el lector puede consultar el libro de Dally, J. W. & Riley, W. F. *Experimental Stress Analysis*, 3ra. Edición, McGraw-Hill, New York, 1991.

En todo caso, e independientemente del tipo de medidor que se utilice, debe tenerse presente que es imposible medir, estrictamente hablando, la deformación en un punto. A lo sumo, por más pequeño que sea el medidor[33], lo que en realidad se hace es medir la variación de una longitud finita, razón por la cual lo que se obtiene es la deformación media sobre la longitud de medida. Si el gradiente del campo de deformaciones es muy elevado en la zona bajo análisis, es posible que exista una deformación máxima superior a la obtenida experimentalmente.

Dejando a un lado esta dificultad metodológica y teniendo como base los principios establecidos, pasamos ahora a estudiar como podría determinarse de manera experimental la matriz de deformaciones en un punto sobre la superficie de un sólido. En primer lugar, como se trata de una superficie libre, el estado de esfuerzos es plano al no existir cargas aplicas sobre dicha superficie. Como se comprenderá más claramente en el capítulo siguiente, el asunto puede tratarse también como un problema bidimensional de deformaciones, aún cuando la deformación normal a la superficie de medición sea distinta de cero. En efecto, puede demostrarse que la dirección normal a la superficie es una dirección principal para las deformaciones, razón por la cual, siguiendo las ideas de la Sec. 1.12 del Cap. 1, concluimos que se trata de un estado *cuasiplano* de deformaciones. Si utilizamos un sistema de coordenadas tal que el eje z sea perpendicular a la superficie de la pieza, entonces las direcciones x y y están desacopladas de la dirección z; es decir, las deformaciones normales ε_x y ε_y, así como la deformación tangencial γ_{xy}, no dependen de la deformación normal según la dirección z, pudiéndose utilizar las mismas ecuaciones que se dedujeron en la Sec. 2.9 para un estado plano de deformaciones.

Para definir entonces el estado de deformaciones en la superficie de una pieza, se requiere, en principio, medir las tres deformaciones ε_x, ε_y y γ_{xy}, o bien las dos deformaciones principales en el plano xy y el ángulo que forma una de ellas con el eje x o con el eje y. Como las deformaciones tangenciales son muy difíciles de medir y como generalmente no se conoce la orientación de las deformaciones principales, lo que se hace realmente es medir la deformación normal según tres direcciones determinadas.

En la Fig. 2.26 se muestra un punto P perteneciente a la superficie de un sólido y las tres direcciones a, b y c según las cuales se medirán las deformaciones normales. Sean θ_a, θ_b y θ_c los ángulos que forman los ejes a, b y c con el eje x, respectivamente. Usando la primera de las Ecs. (2.43) tenemos que las deformaciones normales según los ejes a, b y c pueden expresarse como

[33] Aún cuando existen extensómetros de hasta 0.0125" de longitud, las longitudes más comunes para este tipo de medidores son ¼" y ½".

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \dfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\theta_a + \gamma_{xy}\,\text{sen}\,2\theta_a \\ \varepsilon_b = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \dfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\theta_b + \gamma_{xy}\,\text{sen}\,2\theta_b \\ \varepsilon_c = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \dfrac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\theta_c + \gamma_{xy}\,\text{sen}\,2\theta_c \end{cases} \tag{2.51}$$

Si se han medido experimentalmente las tres deformaciones normales ε_a, ε_b y ε_c, entonces las Ecs. (2.51) constituyen un sistema de tres ecuaciones en las incógnitas ε_x, ε_y y γ_{xy}. El estado de deformaciones quedaría completamente definido, pudiendo determinarse posteriormente las deformaciones principales por medio de las Ecs. (2.47) y (2.48) o mediante la utilización de los círculos de Mohr. Una vez determinadas las deformaciones, la matriz de esfuerzos puede evaluarse por medio del uso de ciertas relaciones que se estudiarán en el próximo capítulo.

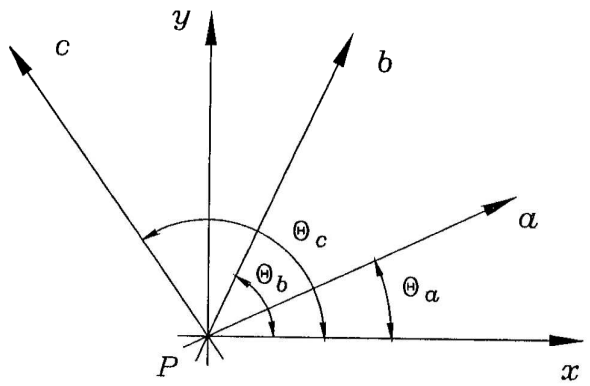


Figura 2.26 Roseta de deformaciones

Un dispositivo para medir las deformaciones según tres o más direcciones[34] recibe el nombre de *roseta de deformaciones*. Con la intención de simplificar la construcción de la roseta y de facilitar al mismo tiempo la solución del sistema de ecuaciones (2.51), se adoptan valores particulares

[34] A veces se utiliza una cuarta dirección con propósitos de verificación.

cómodos para los ángulos θ_a, θ_b y θ_c. Tenemos así los siguientes tipos de rosetas:

a) Roseta Rectangular

En este tipo de roseta las deformaciones se miden según tres ejes que están a 45°, como se muestra en la Fig. (2.27).

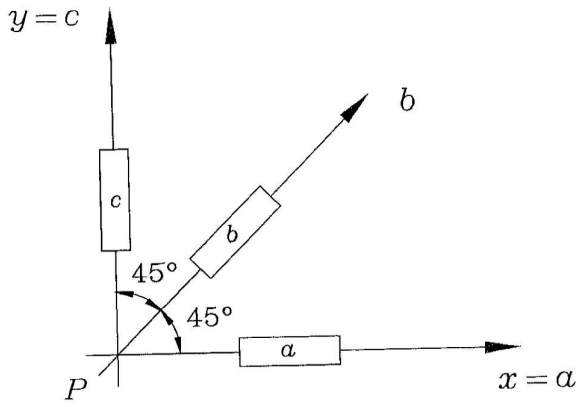


Figura 2.27 Roseta rectangular

Entonces $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 45°$ y $\theta_c = 90°$. El sistema de ecuaciones (2.51) queda como

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_a \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y + 2\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b \\ \varepsilon_y = \varepsilon_c \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_a \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_c \\ \gamma_{xy} &= \varepsilon_b - \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) \end{aligned} \qquad (2.52)$$

b) Roseta Delta

En este tipo de roseta las deformaciones se miden según tres ejes que están a 60°, como se muestra en la Fig. (2.28).

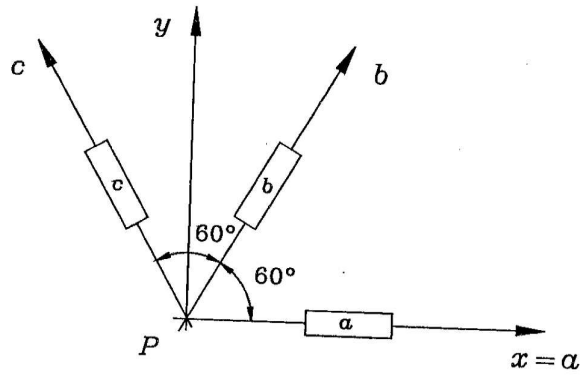


Figura 2.28 Roseta delta

Entonces $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 60°$ y $\theta_c = 120°$. El sistema de ecuaciones (2.51) queda como

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_a \\ \varepsilon_x + 3\varepsilon_y + 2\sqrt{3}\,\gamma_{xy} = 4\varepsilon_b \\ \varepsilon_x + 3\varepsilon_y - 2\sqrt{3}\,\gamma_{xy} = 4\varepsilon_c \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_a \\ \varepsilon_y &= \frac{2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a}{3} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}} \end{aligned} \qquad (2.53)$$

Ejemplo 2.15

Un recipiente de acero de 120" de diámetro exterior y 1.375" de espesor contiene un gas a una presión de 825 psi. Sobre su superficie cilíndrica se adhiere una roseta rectangular con una orientación tal que uno de los extensómetros tiene la dirección axial del recipiente. Si las lecturas indican deformaciones de 0.0002 y 0.0010 en las direcciones axial y circunferencial, respectivamente, mientras que para el tercer extensómetro se lee una deformación de 0.0006, determinar las deformaciones principales en magnitud y dirección sobre la superficie del recipiente.

Solución: Aplicando las Ecs.(2.52) tenemos

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = 0.0002$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c = 0.0010$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_b - \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.0006 - \frac{1}{2}(0.0002 + 0.0010) = 0.0$$

Dado que $\gamma_{xy} = 0$, se concluye que las direcciones x y y, es decir, las direcciones axial y circunferencial, son principales. Luego

$$\varepsilon_1^* = 0.0010 \qquad (\textit{Deformación circunferencial})$$
$$\varepsilon_2^* = 0.0002 \qquad (\textit{Deformación axial})$$

2.11 Matriz de Rotación

Ahora se introducirá el concepto de *matriz de rotación*, el cual será ampliamente utilizado en las dos secciones subsiguientes.

Considérese entonces el movimiento general de un sólido (ver Fig. 2.11) descrito en términos del vector

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{s}$$

Diferenciando tenemos

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{r} + d\mathbf{s}$$

Esto es

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}dz$$

$$= \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right]\mathbf{i}$$

$$+ \left[\frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz\right]\mathbf{k}$$

En notación matricial,

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Esto es

$$d\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{s})\, d\mathbf{r} \tag{2.54}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad y

$$\nabla \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

es el gradiente del vector desplazamiento **s**. Este gradiente puede descomponerse de la siguiente manera

$$\nabla \mathbf{s} = \omega + \varepsilon \tag{2.56}$$

donde

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ -\omega_{xz} & -\omega_{yz} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

es la llamada *matriz de rotación*. Sus componentes vienen dadas por

$$\begin{aligned} \omega_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \omega_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \omega_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Entonces la Ec. (2.54) puede escribirse como

$$d\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \omega + \varepsilon)d\mathbf{r} \tag{2.59}$$

Si el sólido se mueve sin deformarse, entonces $\varepsilon \equiv 0$ y la matriz ω describe el movimiento rígido del sólido. Más adelante se ahondará más en este asunto.

2.12 Ecuaciones de Compatibilidad

En términos generales, los problemas de mecánica de sólidos consisten en la determinación de la matriz de esfuerzos $\sigma(x, y, z)$ y del campo de desplazamientos $\mathbf{s}(x, y, z)$ en términos de las fuerzas de volumen y de las condiciones de borde existentes en la superficie del sólido, que son fuerzas de

superficie (cargas externas aplicadas) y desplazamientos externos o restricciones al movimiento (soportes y otras restricciones).

Como quedará claro a medida que avancemos en la formulación de nuestra teoría, la solución formal de un problema de mecánica de sólidos viene dada por la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con condiciones de borde. La solución analítica de esta clase de problemas, desde un punto de vista estrictamente matemático, es extremadamente compleja y factible en muy pocos casos.

Por esta razón, se han desarrollado variadas metodologías, tales como la teoría de *Resistencia de Materiales*, por ejemplo, las cuales se basan en la apreciación intuitiva y experimental de la naturaleza de un determinado problema para plantear una solución en términos de parámetros o funciones desconocidos, los cuales se determinan posteriormente forzando a que se cumplan las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan, así como las condiciones de borde correspondientes. Estas metodologías se conocen con el nombre genérico de *métodos semi-inversos*. Se denominan así pues los problemas se resuelven a la inversa, comenzando precisamente por proponer una solución parcial o incompleta. Dependiendo de lo que resulte más apropiado o conveniente para una determinada clase de problemas, en estos métodos se proponen soluciones parciales para los *desplazamientos* o bien para los *esfuerzos*.

En el primer caso el procedimiento es relativamente simple pues a partir de los desplazamientos propuestos se determinan las deformaciones por medio de las relaciones deformación-desplazamiento, Ecs. (2.22), y luego se calculan los esfuerzos utilizando relaciones específicas entre los esfuerzos y las deformaciones (denominadas *ecuaciones constitutivas*), las cuales, como veremos en el Cap. 3, dependen del material. Los esfuerzos así obtenidos se introducen en las ecuaciones de equilibrio (1.78) y, posteriormente, se imponen las condiciones de borde para las cargas externas aplicadas, las cuales pueden generalmente expresarse en términos de esfuerzos por medio del Teorema de Cauchy, Ec. (1.11). De esta forma se completa la solución parcial propuesta.

En el segundo caso, cuando se parte de una solución en términos de los esfuerzos, la solución propuesta es tal que cumple de una vez con las ecuaciones de equilibrio (1.78) y las condiciones de borde del problema. Usando entonces las ecuaciones constitutivas que se estudiarán en el Cap. 3, se determinan las deformaciones. Estas deformaciones así obtenidas se introducen en las relaciones deformación-desplazamiento, Ecs. (2.22), y se procede luego a la integración para obtener los desplazamientos u, v y w. A estos desplazamientos se les impone las condiciones de borde para el problema y se completa de esta manera la solución parcial propuesta al principio.

Es justamente en este segundo caso donde pueden presentarse problemas de incompatibilidad entre los esfuerzos propuestos y los desplazamientos correspondientes. En efecto, dado un campo de desplazamientos $\boldsymbol{s} = u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$ continuo con primeras derivadas parciales continuas en la región Ω ocupada por el sólido, entonces las componentes de la matriz de deformaciones pueden determinarse de una manera unívoca por medio de las Ecs. (2.22), las cuales, para comodidad del lector, se reproducen a continuación:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.22a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.22b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.22c}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.22d}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2.22e}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{2.22f}$$

Inversamente, si se conocen las componentes de la matriz de deformaciones en términos de las coordenadas x, y, z, cabe preguntarse si las Ecs. (2.22) admiten solución para las componentes u, v y w del vector desplazamiento. Desde esta perspectiva, las Ecs. (2.22) conforman un sistema de *seis* ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en las *tres* funciones incógnitas u, v y w. Obviamente, existen demasiadas ecuaciones para unas pocas incógnitas. Aplicado al caso de sistemas de ecuaciones lineales, del álgebra elemental se sabe que, en casos como éste, el sistema de ecuaciones es incompatible y que, por lo tanto, no tiene solución, a menos que un número determinado de ecuaciones sea linealmente dependiente de las restantes.

En nuestro caso la situación es parecida. Si las seis componentes de la matriz de deformaciones son especificadas arbitrariamente sin que exista ninguna relación entre ellas, entonces es posible que el sistema (2.22) no tenga solución o, en caso de tenerla, esté conformada por funciones discontinuas. En términos físicos un campo de desplazamientos definido por funciones que no son continuas podría significar, por ejemplo, que en un mismo punto del sólido

existen dos desplazamientos diferentes, lo cual es posible solo si existen vacíos o grietas en el material. Como veremos en breve, las componentes de la matriz de deformaciones deben cumplir ciertas relaciones a fin de que el sistema (2.22) admita una solución compuesta por funciones continuas.

Supongamos entonces que el sistema de ecuaciones (2.22) admite una solución para los desplazamientos u, v y w. Si el desplazamiento $\mathbf{s}(\mathbf{o})$ y la matriz de rotación $\omega(\mathbf{o})$ del origen $\mathbf{o}$ se conocen, entonces el desplazamiento $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0)$ de cualquier punto $\mathbf{r}_0$ del sólido puede obtenerse por medio de la integral de línea a lo largo de una curva continua cualquiera ζ que una a los puntos $\mathbf{o}$ y $\mathbf{r}_0$. Por ejemplo, la componente u del vector desplazamiento puede calcularse como

$$u(\mathbf{r}_o) - u(\mathbf{o}) = \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} du = \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Usando la Ec. (2.56) tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \omega_{xx} + \varepsilon_x = \varepsilon_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \omega_{xy} + \gamma_{xy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \omega_{xz} + \gamma_{xz}$$

Luego

$$u(\mathbf{r}_o) = u(\mathbf{o}) + \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} \varepsilon_x dx + (\omega_{xy} + \gamma_{xy})dy + (\omega_{xz} + \gamma_{xz})dz$$

$$= u(\mathbf{o}) + \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} \varepsilon_x dx + \gamma_{xy}dy + \gamma_{xz}dz + \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} \omega_{xy}dy + \omega_{xz}dz$$

Como $\mathbf{r}_0$ es un punto fijo, los diferenciales en la segunda integral pueden escribirse como $dy = d(y - y_0)$ y $dz = d(z - z_0)$. Entonces, integrando por partes la segunda integral tenemos

$$\int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} \omega_{xy}dy + \omega_{xz}dz = \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} \omega_{xy}d(y-y_o) + \omega_{xz}d(z-z_o)$$

$$= \left[\omega_{xy}(y-y_o) + \omega_{xz}(z-z_o)\right]_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o}$$

$$-\int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} (y-y_o)d\omega_{xy} + (z-z_o)d\omega_{xz}$$

$$= y_o\,\omega_{xy}(\mathbf{o}) + z_o\,\omega_{xz}(\mathbf{o})$$

$$-\int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} (y-y_o)\left(\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega_{xy}}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega_{xy}}{\partial z}dz\right)$$

$$-\int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} (z-z_o)\left(\frac{\partial\omega_{xz}}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega_{xz}}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega_{xz}}{\partial z}dz\right)$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\omega_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\omega_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial\varepsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\omega_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\omega_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial\varepsilon_z}{\partial x}$$

Entonces

$$u(\mathbf{r}_o) = u(\mathbf{o}) + y_o\,\omega_{xy}(\mathbf{o}) + z_o\,\omega_{xz}(\mathbf{o}) + \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{r}_o} F\,dx + G\,dy + H\,dz \tag{2.60}$$

donde F, G y H son las funciones definidas por

$$F = \varepsilon_x - (y-y_o)\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x}\right) - (z-z_o)\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial x}\right)$$

$$G = \gamma_{xy} - (y-y_o)\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}\right) - (z-z_o)\left(\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right) \tag{2.61}$$

$$H = \gamma_{xz} - (y-y_o)\left(\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right) - (z-z_o)\left(\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial\varepsilon_z}{\partial x}\right)$$

Como se dijo, el campo de desplazamientos debe ser continuo, de lo contrario se estarían generando vacíos, dislocaciones o grietas en el material. Entonces, para que el desplazamiento $u(\mathbf{r}_o)$ tenga un valor único en cada punto $\mathbf{r}_o$ del sólido, la integral en la Ec. (2.60) debe ser independiente del camino de integración ζ.

Del análisis vectorial[35] se sabe que si la región Ω es *simplemente conexa* y en todo punto de Ω se cumple que

$$\nabla \times (F\,\mathbf{i} + G\,\mathbf{j} + H\,\mathbf{k}) \equiv \mathbf{0}$$

entonces la integral de la Ec. (2.60) es independiente del camino[36].

De esta expresión se deduce que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} & (a) \\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial z} & (b) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial z} & (c) \end{cases}$$

Introduciendo las Ecs. (2.61) en la condición (a), tenemos

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - (y-y_o)\left(\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}\right) - (z-z_o)\left(\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - (y-y_o)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\right)$$

$$- (z-z_o)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y}\right)$$

[35]Consúltese, por ejemplo, el libro de F.B. Hildebrand "*Advanced Calculus for Applications*", pp. 287-291, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[36]Si la región es múltiplemente conexa, deben satisfacerse un conjunto de condiciones adicionales, denominadas *condiciones integrales de Cesàro*. Para una discusión detallada de este asunto, consúltese el libro de I. H. Shames & F. A. Cozzarelli "*Elastic and Inelastic Stress Analysis*", Prentice-Hall, New Jersey, 1992, pp. 643-646.

Es decir

$$(y-y_o)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ (z-z_o)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z}\right) = 0$$

Como esta ecuación debe cumplirse para todo punto $\mathbf{r}_o = x_o\mathbf{i} + y_o\mathbf{j} + z_o\mathbf{k}$, se concluye entonces que

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Análogamente, introduciendo las Ecs. (2.61) en las condiciones (b) y (c), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Repitiendo el procedimiento para los desplazamientos v y w obtenemos doce ecuaciones adicionales idénticas a las anteriores, a excepción de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

En conclusión, tenemos las seis ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \qquad (2.62)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

que son las llamadas *ecuaciones de compatibilidad.*

Se ha demostrado de esta manera que si las seis componentes de la matriz de deformaciones satisfacen estas ecuaciones, entonces existe un campo de desplazamientos continuo $\mathbf{s} = u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$ obtenido mediante la integración de las Ecs. (2.22).

Inversamente, es posible comprobar por simple sustitución de las expresiones (2.22) en las Ecs. (2.62) que si los desplazamientos u, v y w son funciones continuas con derivadas parciales continuas hasta de tercer orden, entonces se satisfacen las ecuaciones de compatibilidad (2.62). En efecto, sustituyendo las Ecs. 2.22(b) y 2.22(c) en la primera de las Ecs. (2.62) y utilizando la Ec. 2.22(f), tenemos

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z}$$

$$=\frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z}=\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

De igual forma puede procederse con las cinco ecuaciones de compatibilidad restantes, lo cual completaría la prueba del siguiente

Teorema de Existencia

Sea ε la matriz de deformaciones en una región Ω ocupada por un sólido. Entonces existe un campo de desplazamientos $\mathbf{s} = u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$ obtenido mediante la integración de las ecuaciones deformación-desplazamiento (2.22) si, y solo si, las componentes de ε satisfacen las ecuaciones de compatibilidad (2.62). ∎

Aún cuando normalmente se usan por completo las seis ecuaciones de compatibilidad en la formulación y solución de problemas, es posible demostrar que solo tres de ellas son independientes. En efecto, el lector puede comprobar fácilmente que

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial S_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial S_{xz}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial S_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial S_{yz}}{\partial z}=0 \qquad (2.63)$$

$$\frac{\partial S_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial S_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial S_{zz}}{\partial z}=0$$

donde las funciones S_{ij} provienen de escribir las Ecs. (2.62) en la forma

$$S_{xx}=\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}=0$$

$$S_{yy}=\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}=0$$

$$S_{zz}=\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}=0$$

$$S_{xy}=-\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=0 \qquad (2.64)$$

$$S_{xz}=-\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=0$$

$$S_{yz}=\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=0$$

A las Ecs. (2.63) se les da el nombre de *condiciones de Bianchi*. Esto demuestra que las seis componentes de la matriz de deformaciones deben satisfacer justamente tres condiciones independientes a fin de que las seis ecuaciones deformación-desplazamiento sean integrables para las tres componentes u, v y w de los desplazamientos.

2.13 Desplazamientos Rígidos

Como se dijo al principio de este capítulo, el movimiento del sólido puede descomponerse en un *movimiento rígido* y en una *deformación pura*. El movimiento como cuerpo rígido puede descomponerse en una traslación más una rotación, mientras que la deformación del sólido puede, como hemos visto, caracterizarse por *cambios de longitudes* y por *variaciones de ángulos*. Dado que el movimiento de un sólido como cuerpo rígido no produce esfuerzos, nosotros estaremos primariamente interesados en extraer del movimiento general de un sólido la parte correspondiente a la deformación pura, descartando por completo la parte rígida del movimiento. A tales efectos, en esta sección trataremos de identificar la estructura del campo de desplazamientos que caracteriza a un movimiento rígido.

Un desplazamiento se dice que es *rígido* si las distancias entre los puntos del sólido no cambian en el transcurso del movimiento. Supongamos entonces que el campo de desplazamientos $\mathbf{s} = u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$ es rígido. Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición de una partícula P en el instante inicial $t = 0$. Sea $Oxyz$ un sistema de referencia ortonormal con origen en el punto O del sólido, Fig. 2.29.

Para un instante genérico t, el sólido ocupará una región Ω' del espacio y el punto P se habrá desplazado a la posición P' con vector de posición

$$\mathbf{R}(\mathbf{r},t) = \mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r},t) \tag{2.65}$$

El desplazamiento del origen es

$$\mathbf{R}(\mathbf{0},t) = \mathbf{s}(\mathbf{0},t) = \mathbf{b}(t) \tag{2.66}$$

donde $\mathbf{b}(t)$ es una función vectorial del tiempo.

Consideremos ahora un sistema móvil de coordenadas $O'x'y'z'$ solidario al sólido, de manera que en el instante inicial $t = 0$ los sistemas $Oxyz$ y $O'x'y'z'$ coinciden (ver Fig. 2.29). Entonces

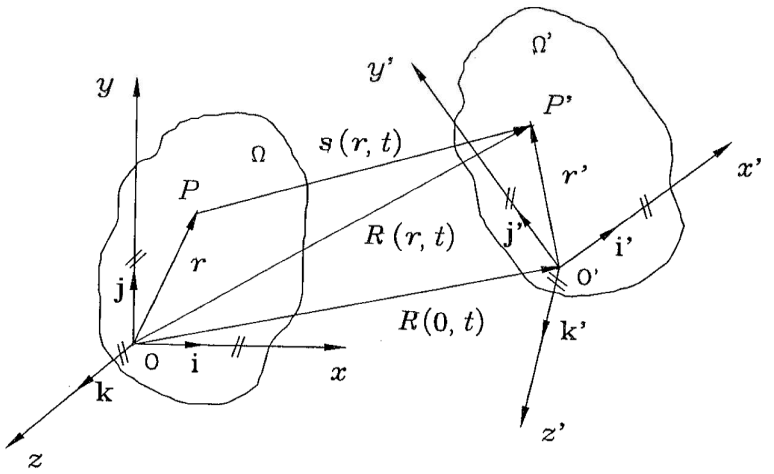


Figura 2.29 Desplazamiento rígido

$$\mathbf{R}(\mathbf{r},t) = \mathbf{R}(\mathbf{0},t) + \mathbf{r}'(t) \tag{2.67}$$

Como el desplazamiento es rígido,

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' + z\mathbf{k}'$$

Ahora bien,

$$\mathbf{i}' = (\mathbf{i}'\circ\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}'\circ\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}'\circ\mathbf{k})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}' = (\mathbf{j}'\circ\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{j}'\circ\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{j}'\circ\mathbf{k})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}' = (\mathbf{k}'\circ\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{k}'\circ\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{k}'\circ\mathbf{k})\mathbf{k}$$

Esto es

$$\mathbf{i}' = a_{xx}\mathbf{i} + a_{xy}\mathbf{j} + a_{xz}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}' = a_{yx}\mathbf{i} + a_{yy}\mathbf{j} + a_{yz}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}' = a_{zx}\mathbf{i} + a_{zy}\mathbf{j} + a_{zz}\mathbf{k}$$

donde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}(t) \tag{2.68}$$

es la matriz de los cosenos directores del sistema $O'x'y'z'$.

Entonces

$$\mathbf{r}' = (xa_{xx} + ya_{yx} + za_{zx})\mathbf{i} + (xa_{xy} + ya_{yy} + za_{zy})\mathbf{j} + (xa_{xz} + ya_{yz} + za_{zz})\mathbf{k}$$

En notación matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{zy} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{A}^T(t)\ \mathbf{r} \tag{2.69}$$

Sustituyendo (2.66) y (2.69) en la Ec. (2.67), tenemos

$$\mathbf{R}(\mathbf{r},t) = \mathbf{b}(t) + \mathbf{A}^T(t)\ \mathbf{r} \tag{2.70}$$

Luego el desplazamiento del punto P será

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{R}(\mathbf{r},t) - \mathbf{r} \\ &= \mathbf{b}(t) + \mathbf{A}^T(t)\ \mathbf{r} - \mathbf{r} \\ &= \mathbf{b}(t) + \left[\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{I}\right]\mathbf{r} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.

En resumen, si el desplazamiento es rígido, entonces admite la representación

$$\mathbf{s}(\mathbf{r},t) = \mathbf{b}(t) + \mathbf{c}(t)\,\mathbf{r} \tag{2.71}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \mathbf{R}(\mathbf{0},t) \\ \mathbf{c}(t) &= \mathbf{A}^T(t) - \mathbf{I} \end{aligned} \tag{2.72}$$

En general, el vector $\mathbf{b}$ y las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{c}$ son funciones del tiempo. Sin embargo, si en el movimiento del sólido se consideran simplemente las posiciones inicial y final, como es usual en el análisis de esfuerzos, entonces el vector $\mathbf{b}$ es una constante que representa el desplazamiento del origen, mientras que $\mathbf{A}$, también una constante, es la matriz de los cosenos directores del sistema $O'x'y'z'$ en la posición final del sólido.

En términos de sus componentes cartesianas, la Ec. (2.71) puede escribirse como

$$\begin{aligned} u &= b_x + (a_{xx} - 1)x + a_{yx}y + a_{zx}z \\ v &= b_y + a_{xy}x + (a_{yy} - 1)y + a_{zy}z \\ w &= b_z + a_{xz}x + a_{yz}y + (a_{zz} - 1)z \end{aligned} \tag{2.73}$$

Utilizando estas expresiones para el campo de desplazamientos, calculemos ahora las componentes de la matriz de deformaciones. Usando las Ecs. (2.22) tenemos

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_{xx} - 1$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = a_{yy} - 1$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = a_{zz} - 1$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(a_{yx} + a_{xy})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(a_{zx} + a_{xz})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(a_{zy} + a_{yz})$$

Como se observa, estas componentes son, en general, distintas de cero, a pesar de que corresponden a un desplazamiento rígido. Sin embargo, si las rotaciones son "pequeñas" (o infinitesimales, como usualmente se les llama), es posible comprobar que las deformaciones son aproximadamente iguales a cero.

En efecto, si las rotaciones son pequeñas, entonces $a_{xx} = \cos(x', x) \approx 1$, $a_{yy} = \cos(y', y) \approx 1$ y $a_{zz} = \cos(z', z) \approx 1$, de donde se concluye que $\varepsilon_x \approx 0$, $\varepsilon_y \approx 0$ y $\varepsilon_z \approx 0$.

Por otra parte, como el sistema de coordenadas es ortonormal, los cosenos directores cumplen con las relaciones

$$\begin{aligned} &a_{xx}^2 + a_{xy}^2 + a_{xz}^2 = 1 \\ &a_{yx}^2 + a_{yy}^2 + a_{yz}^2 = 1 \\ &a_{zx}^2 + a_{zy}^2 + a_{zz}^2 = 1 \\ &a_{xx}\, a_{yx} + a_{xy}\, a_{yy} + a_{xz}\, a_{yz} = 0 \\ &a_{xx}\, a_{zx} + a_{xy}\, a_{zy} + a_{xz}\, a_{zz} = 0 \\ &a_{yx}\, a_{zx} + a_{yy}\, a_{zy} + a_{yz}\, a_{zz} = 0 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Como las rotaciones son pequeñas, $a_{xz} = \cos(x', z) << 1$ y $a_{yz} = \cos(y', z) << 1$, por lo que $(a_{xz})(a_{yz}) \approx 0$. Usando estas aproximaciones en la cuarta de las Ecs. (2.74), y recordando también que $a_{xx} \approx 1$ y $a_{yy} \approx 1$, tenemos que $a_{yx} + a_{xy} \approx 0$. De una manera similar se puede verificar que $a_{zx} + a_{xz} \approx 0$ y $a_{zy} + a_{yz} \approx 0$. Luego $\gamma_{xy} \approx 0$, $\gamma_{xz} \approx 0$ y $\gamma_{yz} \approx 0$.

De esta manera se concluye, contradictoriamente, que un desplazamiento rígido no da lugar, en general, a un campo de deformaciones nulo. Esta es una de las principales debilidades de la teoría de las pequeñas deformaciones que hemos estado estudiando.

Consideremos ahora el campo de desplazamientos definido por la Ec. (2.71) y supongamos que las componentes de la matriz de deformaciones son nulas. Escribiendo la Ec. (2.71) en términos de sus componentes cartesianas tenemos

$$\begin{aligned} u &= b_x + c_{xx}\, x + c_{xy}\, y + c_{xz}\, z \\ v &= b_y + c_{yx}\, x + c_{yy}\, y + c_{yz}\, z \\ w &= b_z + c_{zx}\, x + c_{zy}\, y + c_{zz}\, z \end{aligned}$$

Entonces

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = c_{xx} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = c_{yy} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = c_{zz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(c_{xy} + c_{yx}) = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(c_{xz} + c_{zx}) = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(c_{yz} + c_{zy}) = 0$$

Luego

$$\begin{aligned} u &= b_x + c_{xy}\, y + c_{xz}\, z \\ v &= b_y + c_{yx}\, x + c_{yz}\, z \\ w &= b_z + c_{zx}\, x + c_{zy}\, y \end{aligned}$$

O bien

$$\begin{aligned} u &= b_x - c_{yx} y + c_{xz} z \\ v &= b_y + c_{yx} x - c_{zy} z \\ w &= b_z - c_{xz} x + c_{zy} y \end{aligned} \tag{2.75}$$

Esta ecuación puede escribirse en forma vectorial como

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r} \tag{2.76}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es el *vector de rotación*

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{zy} \\ c_{xz} \\ c_{yx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{yz} \\ a_{zx} \\ a_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

Pero

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(c_{xy} - c_{yx}) = -c_{yx} = -a_{xy} = -\omega_z$$

$$\omega_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(c_{xz} - c_{zx}) = c_{xz} = a_{zx} = \omega_y$$

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(c_{yz} - c_{zy}) = -c_{zy} = -a_{yz} = -\omega_x$$

Es decir

$$\omega = \begin{bmatrix} -\omega_{yz} \\ \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

Este vector de rotación es el vector asociado a la matriz de rotación antisimétrica definida en la Sec. (2.11).

A un desplazamiento descrito por la Ec. (2.75) o por la (2.76) se le llama *desplazamiento rígido infinitesimal*. Nótese que un desplazamiento rígido infinitesimal es tan solo *aproximadamente rígido* y que un desplazamiento rígido no implica, en general, que las deformaciones sean nulas.

Hemos demostrado entonces que si la matriz de deformaciones ε es idénticamente nula para todo punto $\mathbf{r}$ de un sólido que ocupa una región Ω del espacio, entonces el desplazamiento es *rígido infinitesimal*. Recíprocamente, si un campo de desplazamientos es rígido infinitesimal, entonces $\varepsilon \equiv \mathbf{0}$ para todo punto $\boldsymbol{r} \in \Omega$.

Ahora estamos en condiciones de establecer el siguiente

Teorema de Unicidad

Sean $\mathbf{s}' = u'\mathbf{i}+v'\mathbf{j}+w'\mathbf{k}$ y $\mathbf{s}'' = u''\mathbf{i}+v''\mathbf{j}+w''\mathbf{k}$ dos soluciones distintas del sistema de ecuaciones diferenciales (2.22) para un mismo campo de deformaciones ε. Entonces existe un campo de desplazamientos rígido infinitesimal $\mathbf{s}^\circ = u^\circ\mathbf{i}+v^\circ\mathbf{j}+w^\circ\mathbf{k}$ tal que $\mathbf{s}^\circ = \mathbf{s}'' - \mathbf{s}'$.

Demostración: Tomemos, por ejemplo, la componente γ_{xy} de la matriz de deformaciones. Por hipótesis

$$\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = 2\gamma_{xy} \qquad (a)$$

$$\frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial x} = 2\gamma_{xy} \qquad (b)$$

Restando (b) menos (a) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}(u''-u') + \frac{\partial}{\partial x}(v''-v') = 0$$

Sea $\mathbf{s}^\circ$ el campo de desplazamientos definido por

$$u^\circ = u'' - u'$$

$$v^\circ = v'' - v'$$

$$w^\circ = w'' - w'$$

Entonces

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y} = 0$$

Procediendo de la misma manera con el resto de las componentes de la matriz de deformaciones, llegamos a las siguientes expresiones

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v^\circ}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial w^\circ}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial z} + \frac{\partial w^\circ}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v^\circ}{\partial z} + \frac{\partial w^\circ}{\partial y} = 0$$

Luego, por definición, $\mathbf{s}^{\circ} = \mathbf{s}'' - \mathbf{s}'$ es rígido infinitesimal.

En conclusión podemos entonces afirmar que, en ausencia de movimientos rígidos, la solución del sistema de ecuaciones (2.22), si existe, es única.

Ejemplo 2.16

A consecuencia de un aumento en la temperatura ambiente, un bloque rectangular de dimensiones $a \times b \times c$ (ver Fig. 2.30) se expande linealmente, experimentando dilataciones $a\alpha\Delta T$, $b\alpha\Delta T$ y $c\alpha\Delta T$ en las direcciones x, y y z, respectivamente, siendo α el coeficiente de dilatación lineal del material y ΔT el cambio de temperatura. Posteriormente, rota sin deformarse un ángulo θ alrededor del eje z.

Determinar el campo de desplazamientos total y la matriz de deformaciones.

Solución: Para determinar el campo de desplazamientos, analizaremos por separado las deformaciones térmicas y la rotación como cuerpo rígido del bloque.

El lector puede comprobar fácilmente que el campo de desplazamientos correspondiente a la deformaciones térmicas viene dado por

$$\begin{aligned} u' &= \alpha\,\Delta T x \\ v' &= \alpha\,\Delta T y \\ w' &= \alpha\,\Delta T z \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

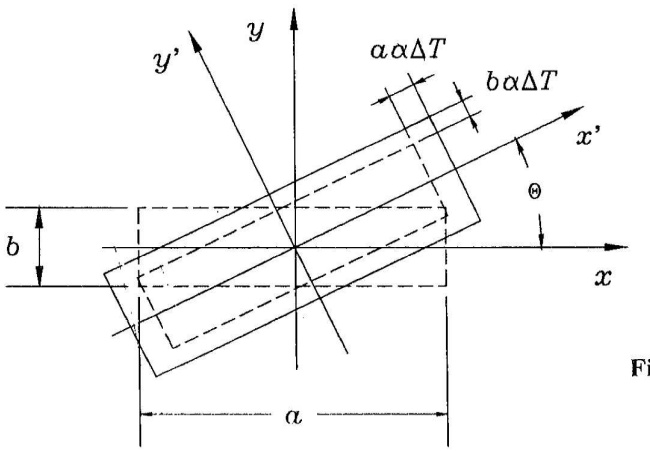


Figura 2.30 Ejemplo 2.16

La matriz de rotación correspondiente a un giro de un ángulo θ alrededor del eje z es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, el campo de desplazamientos para la rotación descrita, de acuerdo con la Ec. (2.73) y tomando como nulo el desplazamiento del origen, es

$$\begin{aligned} u'' &= x(\cos\theta - 1) - y\operatorname{sen}\theta \\ v'' &= x\operatorname{sen}\theta + y(\cos\theta - 1) \\ w'' &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Superponiendo las Ecs (a) y (b) obtenemos el campo de desplazamientos total

$$\begin{aligned} u &= x(\alpha\Delta T + \cos\theta - 1) - y\operatorname{sen}\theta \\ v &= x\operatorname{sen}\theta + y(\alpha\Delta T + \cos\theta - 1) \\ w &= z\,\alpha\Delta T \end{aligned}$$

Usando ahora las Ecs. (2.22) tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha\Delta T + \cos\theta - 1 \\ \varepsilon_y &= \alpha\Delta T + \cos\theta - 1 \\ \varepsilon_z &= \alpha\Delta T \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned}$$

Nótese que la rotación rígida del bloque aporta una contribución a las deformaciones totales ε_x y ε_y igual a $\cos\theta - 1$, lo cual es un contrasentido, a menos que el ángulo de rotación sea muy pequeño, en cuyo caso $\cos\theta - 1 \approx 0$.

El vector de rotación viene dado por

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{yz} \\ \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

De nuevo, si el ángulo de rotación es muy pequeño, entonces $\omega_z = \sin\theta \approx 0$, como era de esperar.

2.14 Deformaciones Finitas

Hemos visto en la sección anterior la contradicción que se genera en el análisis de los desplazamientos rígidos cuando se utiliza el concepto de deformaciones pequeñas o infinitesimales ε. Estas deformaciones infinitesimales se usan en la gran mayoría de las aplicaciones de ingeniería; sin embargo, existen circunstancias donde los desplazamientos y sus derivadas no son pequeños, razón por la cual se hace imprescindible una caracterización más precisa de las deformaciones. En esta sección se presentará una breve introducción a la teoría de las deformaciones finitas.

Considérese de nuevo la Fig. 2.2. Sean $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ los vectores de posición de dos puntos P y Q infinitamente próximos entre sí en el instante inicial $t = 0$. Cuando el sólido pasa de la configuración inicial no deformada Ω a la configuración deformada Ω', los puntos P y Q experimentan sendos desplazamientos $\mathbf{s}$ y $\mathbf{s}+d\mathbf{s}$, pasando a ocupar las posiciones P' y Q', respectivamente. La longitud inicial del segmento $\overline{PQ}$ es $|d\mathbf{r}|$, mientras que su longitud final es $\overline{P'Q'} = |d\mathbf{R}|$.

Sea $\mathbf{n}$ un vector unitario en la dirección del elemento infinitesimal $d\mathbf{r}$. En la configuración final, el elemento infinitesimal $d\mathbf{r}$ tendrá una longitud $|d\mathbf{R}|$ y la dirección del vector unitario $\mathbf{N}$ definido por la Ec. (2.7).

Definimos la *deformación normal finita* en el punto $\mathbf{r}$ y en la dirección del vector $\mathbf{n}$ como

$$L_n = \frac{1}{2}\frac{|d\mathbf{R}|^2 - |d\mathbf{r}|^2}{|d\mathbf{r}|^2} \tag{2.79}$$

Esta deformación normal será positiva si se trata de un alargamiento y negativa si se refiere a una contracción. Obviamente, esta deformación normal es también adimensional.

Consideremos ahora dos elementos infinitesimales $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{q}$ perpendiculares entre sí (ver Fig. 2.9). Sean $\mathbf{n}$ y $\mathbf{m}$ los vectores unitarios en las direcciones de $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{q}$, respectivamente. Sean $d\mathbf{R}$ y $d\mathbf{Q}$ los vectores que definen a estos segmentos infinitesimales en la configuración deformada del sólido. Sean $\mathbf{N}$ y $\mathbf{M}$ los vectores unitarios en las direcciones de $d\mathbf{R}$ y $d\mathbf{Q}$.

Definimos la *deformación tangencial finita* entre las direcciones $\mathbf{n}$ y $\mathbf{m}$ en el punto $\mathbf{r}$ de un sólido como la mitad del seno de la variación del ángulo inicialmente recto entre los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{m}$. Esto es

$$L_{nm} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = \frac{1}{2}\cos\theta \tag{2.80}$$

Esta deformación también es adimensional. Se considera positiva si el ángulo inicialmente recto disminuye ($\theta < \pi/2$) y negativa en caso contrario ($\theta > \pi/2$).

Si las deformaciones son pequeñas, las definiciones (2.79) y (2.80) coinciden con sus homólogas (2.8) y (2.10). En efecto, de la Ec. (2.79) tenemos

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\frac{|d\mathbf{R}|^2 - |d\mathbf{r}|^2}{|d\mathbf{r}|^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\big(|d\mathbf{R}| - |d\mathbf{r}|\big)\big(|d\mathbf{R}| + |d\mathbf{r}|\big)}{|d\mathbf{r}|^2} \\ &\approx \frac{1}{2}\frac{\big(|d\mathbf{R}| - |d\mathbf{r}|\big)\big(2|d\mathbf{r}|\big)}{|d\mathbf{r}|^2} = \frac{|d\mathbf{R}| - |d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{r}|} = \varepsilon_n \end{aligned}$$

De igual forma,

$$L_{nm} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) \approx \frac{1}{2}(\pi/2 - \theta) = \gamma_{nm}$$

Siguiendo la metodología de la Sec. 2.5, expresaremos ahora la deformación normal finita (2.79) y la deformación tangencial finita (2.80) en términos de las componentes u, v y w del vector desplazamiento $\mathbf{s} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$.

Sustituyendo la Ec. (2.15) en la (2.79) tenemos

$$L_n = \mathbf{n} \circ \frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|} + \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|} \circ \frac{d\mathbf{s}}{|d\mathbf{r}|} \tag{2.81}$$

Usando la Ec. (2.19) y efectuando los productos escalares indicados en la Ec. (2.81) obtenemos

$$\begin{aligned} L_n = {} & L_x \cos^2\alpha + L_y \cos^2\beta + L_z \cos^2\gamma + \\ & + 2(L_{xy}\cos\alpha\cos\beta + L_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + L_{yz}\cos\beta\cos\gamma) \end{aligned} \tag{2.82}$$

donde

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\ L_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\ L_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\ L_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ L_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ L_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{2.83}$$

son las componentes de la matriz simétrica

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_x & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{xy} & L_y & L_{yz} \\ L_{xz} & L_{yz} & L_z \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

denominada *matriz de deformaciones finitas de Lagrange*.

La Ec. (2.82) puede ahora escribirse en forma matricial como

$$L_n = \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n} \tag{2.85}$$

Nótese la similitud de las ecuaciones (2.24) y (2.85).

Retornando a la definición de deformación tangencial finita dada por la Ec. (2.80), resulta evidente de la Fig. 2.9 que

$$L_{nm} = \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{R} \circ d\mathbf{Q}}{|d\mathbf{R}||d\mathbf{Q}|} \tag{2.86}$$

De la Ec. (2.27) deducida en la Sec. 2.5 tenemos que

$$d\mathbf{R} = |d\mathbf{r}|\left(\mathbf{n} + n_x\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + n_y\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + n_z\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}\right) \tag{2.87}$$

Análogamente, puede demostrarse que

$$d\mathbf{Q} = |d\mathbf{q}|\left(\mathbf{m} + m_x\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + m_y\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + m_z\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}\right) \tag{2.88}$$

Desarrollando formalmente el producto $d\mathbf{R} \circ d\mathbf{Q}$, utilizando las Ecs. (2.83) y teniendo presente que $\mathbf{n} \circ \mathbf{m} = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} \circ d\mathbf{Q} = 2|d\mathbf{r}||d\mathbf{q}|\big[& n_x m_x L_x + n_y m_y L_y + n_z m_z L_z \\ & + (n_x m_y + n_y m_x) L_{xy} + (n_x m_z + n_z m_x) L_{xz} \\ & + (n_y m_z + n_z m_y) L_{yz}\big] \end{aligned}$$

O bien

$$d\mathbf{R} \circ d\mathbf{Q} = 2|d\mathbf{r}||d\mathbf{q}|\,\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m} \tag{2.89}$$

De la definición (2.79) tenemos

$$L_n = \frac{1}{2}\frac{|d\mathbf{R}|^2 - |d\mathbf{r}|^2}{|d\mathbf{r}|^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{|d\mathbf{R}|^2}{|d\mathbf{r}|^2} - 1\right)$$

De donde

$$|d\mathbf{R}| = |d\mathbf{r}|\sqrt{1 + 2L_n}$$

Usando la Ec. (2.85) obtenemos

$$|d\mathbf{R}| = |d\mathbf{r}|\sqrt{1 + 2\,\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}} \tag{2.90}$$

Análogamente

$$|d\mathbf{Q}| = |d\mathbf{q}|\sqrt{1 + 2\,\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}} \tag{2.91}$$

Sustituyendo las Ecs. (2.89), (2.90) y (2.91) en la Ec. (2.86), obtenemos finalmente

$$L_{nm} = \frac{\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}}{\sqrt{1 + 2\,\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}}\ \sqrt{1 + 2\,\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{m}}} \tag{2.92}$$

En resumen, dada la matriz de deformaciones finitas **L**, la deformación normal finita en cualquier dirección y la deformación tangencial finita entre dos direcciones ortogonales cualesquiera pueden ser determinadas por medio de las ecuaciones de transformación (2.85) y (2.92). De esta manera se concluye que las seis componentes de la matriz de deformaciones finitas caracterizan por completo el estado de deformaciones en un punto dado de un sólido.

Usando estas ecuaciones de transformación, puede demostrarse también que, bajo una rotación **A** del sistema de coordenadas, las componentes de la matriz de deformaciones finitas se transforman según la ecuación

$$\mathbf{L}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{A}^T \tag{2.93}$$

Las componentes de la matriz de deformaciones finitas de Lagrange admiten también una interpretación geométrica sencilla como la establecida para las deformaciones infinitesimales en la Sec. 2.6. En efecto, de la Fig. 2.14 se tiene que la longitud final $\overline{P'A'}$ del segmento de recta $\overline{PA}$, inicialmente paralelo al eje x, es

$$\overline{P'A'}^2 = \left[dx + (u + \frac{\partial u}{\partial x}dx) - u\right]^2 + \left[(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx) - v\right]^2$$
$$= \left[1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2\right](dx)^2$$

Entonces la deformación normal finita según la dirección del eje x será, por definición,

$$L_{PA} = \frac{\overline{P'A'}^2 - \overline{PA}^2}{2\overline{PA}^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2\right] = \varphi_x$$

Análogamente, con referencia a la Fig. 2.14, se obtiene

$$L_{PB} = \frac{\overline{P'B'}^2 - \overline{PB}^2}{2\overline{PB}^2} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2\right] = \varphi_y$$

Es decir, las componentes L_x, L_y y L_z son las deformaciones normales finitas en las direcciones de los ejes x, y y z, respectivamente.

Para tener una interpretación geométrica de las otras componentes de la matriz de deformaciones finitas, calculemos la variación $\alpha+\beta$ del ángulo inicialmente recto PAB en la Fig. 2.14. De esta figura tenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$
$$= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx\,(1 + \frac{\partial v}{\partial y})dy}{\overline{P'A'}\,\overline{P'B'}} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy\,(1 + \frac{\partial u}{\partial x})dx}{\overline{P'B'}\,\overline{P'A'}}$$

Pero

$$\overline{P'A'}^2 = 2\overline{PA}^2 L_x + \overline{PA}^2$$
$$= \overline{PA}^2 (1 + 2L_x)$$

Esto es

$$\overline{P'A'} = \overline{PA}\sqrt{1+2L_x} = dx\sqrt{1+2L_x}$$

Análogamente,

$$\overline{P'B'} = \overline{PB}\sqrt{1+2L_y} = dy\sqrt{1+2L_y}$$

Luego

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{1+2L_x}\ \sqrt{1+2L_y}}$$

Es decir

$$\varphi_{PA,PB} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{L_{xy}}{\sqrt{1+2L_x}\ \sqrt{1+2L_y}}$$

De aquí se concluye que la deformación tangencial finita entre los ejes x y y es proporcional a la magnitud de la componente L_{xy}, pero depende también de L_x y L_y.

Para concluir con esta breve introducción a la teoría de las deformaciones finitas, la Ec. (2.59) puede ahora escribirse como

$$d\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \Omega + \mathbf{L})\, d\mathbf{r} \tag{2.94}$$

donde Ω es la llamada *matriz de rotación de Lagrange*. Sus componentes vienen dadas por

$$\Omega_x = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\Omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\Omega_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\Omega_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\Omega_y = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\Omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\Omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\Omega_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\Omega_z = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \tag{2.95}$$

Evaluemos ahora las matrices de deformaciones finitas y de rotación de Lagrange para el desplazamiento rígido definido por expresiones (2.73). Usando las Ecs. (2.83) tenemos

$$L_x = a_{xx} - 1 + \frac{1}{2}\left[(a_{xx}-1)^2 + a_{xy}^2 + a_{xz}^2\right]$$
$$= a_{xx} - 1 + \frac{1}{2}\left[a_{xx}^2 - 2a_{xx} + 1 + a_{xy}^2 + a_{xz}^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(a_{xx}^2 + a_{xy}^2 + a_{xz}^2 - 1\right) = 0$$

Análogamente, $L_y = L_z \equiv 0$.

De la misma manera, las deformaciones tangenciales finitas se obtienen como

$$L_{xy} = \frac{1}{2}\left[a_{yx} + a_{xy} + (a_{xx} - 1)a_{yx} + a_{xy}(a_{yy} - 1) + a_{xz}\, a_{yz}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[a_{xx}a_{yx} + a_{xy}\, a_{yy} + a_{xz}\, a_{yz}\right] \equiv 0$$

Asimismo, $L_{xz} = L_{yz} \equiv 0$.

Concluimos así las componentes de la matriz de deformaciones finitas que resultan de un campo de desplazamientos rígido son idénticamente nulas.

Además, de las Ecs. (2.95) tenemos que

$$\Omega_x = -\frac{1}{2}\left[(a_{xx} - 1)^2 + a_{xy}^2 + a_{xz}^2\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left[a_{xx}^2 - 2a_{xx} + 1 + a_{xy}^2 + a_{xz}^2\right]$$
$$= -\frac{1}{2}(2 - 2a_{xx})$$
$$= a_{xx} - 1$$

Análogamente,

$$\Omega_y = a_{yy} - 1$$
$$\Omega_z = a_{zz} - 1$$

De una manera similar,

$$\Omega_{xy} = \frac{1}{2}\left[a_{yx} - a_{xy} - (a_{xx} - 1)a_{yx} - a_{xy}(a_{yy} - 1) - a_{xz}\, a_{yz}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2a_{yx} - a_{xx}\, a_{yx} - a_{xy}\, a_{yy} - a_{xz}\, a_{yz}\right] = a_{yx}$$

y también

$$\Omega_{xz} = a_{zx}, \qquad \Omega_{yz} = a_{zy}, \qquad \Omega_{yx} = a_{xy}, \qquad etc.$$

Es decir

$$\Omega = \mathbf{A}^T - \mathbf{I}$$

Introduciendo estos resultados en las Ecs. (2.71) y (2.72) obtenemos que un campo de desplazamientos rígido viene dado por

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{0}, t) + \Omega(t)\, \mathbf{r} \tag{2.96}$$

Nótese que, a expensas de tener una formulación más precisa, las relaciones entre las deformaciones y las derivadas de los desplazamientos dejan de ser lineales en la teoría de las deformaciones finitas. Aparte de las complicaciones matemáticas que ello pueda tener, la implicación más fuerte reside que no se puede en esta teoría aplicar el llamado *principio de superposición* de causas y efectos. Es decir, si dos sistemas de cargas P y P' dan lugar separadamente a matrices de deformaciones **L** y **L'**, respectivamente, no es cierto que el sistema de cargas combinado P + P' produzca un estado de deformaciones **L** + **L'**. En efecto, si los sistemas de cargas P y P' producen campos de desplazamientos $\mathbf{s} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ y $\mathbf{s}' = u'\mathbf{i} + v'\mathbf{j} + w'\mathbf{k}$, respectivamente, entonces, de acuerdo con las Ecs. (2.83), tenemos

$$L_x + L'_x = \frac{\partial(u + u')}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2\right]$$
$$\neq \frac{\partial(u+u')}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial(u + u')}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial(v + v')}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(w + w')}{\partial x}\right]^2\right\}$$

Esta es una limitación realmente importante en el análisis de esfuerzos pues, generalmente, resulta conveniente resolver aisladamente problemas simples y, mediante el principio de superposición, obtener la solución para el caso en el cual actúan simultáneamente varios sistemas de cargas de diferente naturaleza.

Ejemplo 2.17

Una placa rectangular de dimensiones $a \times b$ experimenta una rotación rígida θ alrededor del eje z, como se muestra en la Fig. 2.31. Determinar el campo de desplazamientos, la matriz de deformaciones infinitesimales y la matriz de deformaciones finitas de Lagrange.

Solución: Cuando la placa gira rígidamente un ángulo θ alrededor del eje z, el punto genérico $P(x, y, z)$ se mueve sobre un arco de circunferencia de radio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ hasta alcanzar la posición $P'(x+u,\ y+v,\ z)$, experimentando sendos desplazamientos u y v en las direcciones x y y, respectivamente, mientras que el desplazamiento w en la dirección del eje z es nulo (Fig. 2.31). Tenemos así que

$$u = r\cos(\alpha + \theta) - r\cos\alpha$$
$$v = r\,\text{sen}\,(\alpha + \theta) - r\,\text{sen}\,\alpha$$
$$w \equiv 0$$

donde α es el ángulo que forma el radio r con el eje x

Aplicando ahora las fórmulas del seno y coseno de la suma de dos ángulos y tomando en cuenta que $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\theta$, el campo de desplazamientos viene dado entonces por

$$u = x(\cos\theta - 1) - y\,\text{sen}\,\theta$$
$$v = x\,\text{sen}\,\theta + y(\cos\theta - 1)$$
$$w \equiv 0$$

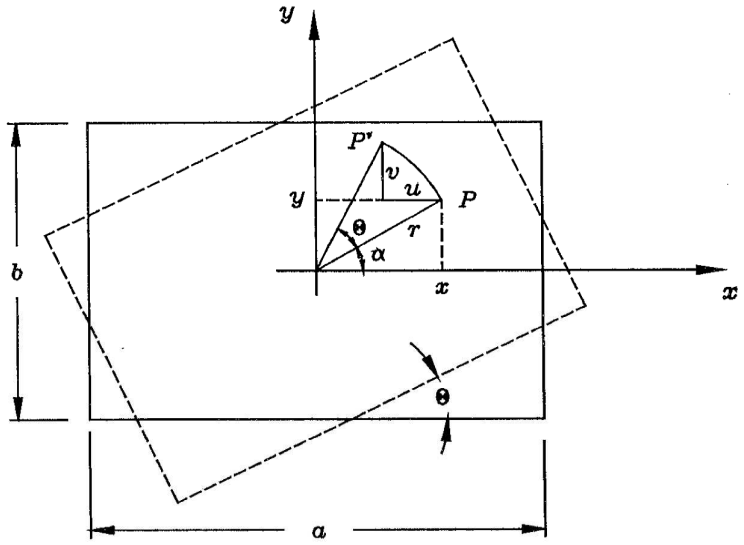


Figura 2.31 Rotación rígida de una placa alrededor del eje z, ejemplo 2.17

Usando las relaciones deformación-desplazamiento (2.22), las componentes de la matriz de deformaciones infinitesimales vienen dadas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta - 1$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \cos\theta - 1$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(-\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\theta) = 0$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$$

Luego

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si el ángulo de rotación θ es muy pequeño, entonces $\cos\theta \approx 1$ y todas las componentes de la matriz de deformaciones infinitesimales serían nulas. Sin embargo, para un ángulo θ cualquiera tendríamos la inconsistencia de que un movimiento rígido generaría deformaciones no nulas.

Si usamos las teoría de las deformaciones finitas podemos comprobar que esta inconsistencia no tiene cabida. En efecto, si empleamos ahora las relaciones deformación-desplazamiento (2.83), las componentes de la matriz de deformaciones finitas vienen dadas por

$$L_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$
$$\cos\theta - 1 + \frac{1}{2}\left[(\cos\theta - 1)^2 + \text{sen}^2\,\theta\right] = 0$$

$$L_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$= \cos\theta - 1 + \frac{1}{2}\left[(-\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta - 1)^2\right] = 0$$

$$L_z = 0$$

$$L_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta + (\cos\theta - 1)(-\operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}\theta(\cos\theta - 1) + 0\right] = 0$$

$$L_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

$$L_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

Entonces

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.18

Una lámina cuadrada *ABCD* de lado h se deforma bajo la aplicación de un cierto sistema de cargas hasta llegar a la configuración *A'B'C'D'* mostrada con líneas de trazos en la Fig. 2.32. Suponiendo que el estado de deformaciones es homogéneo:

a) Determine el campo de desplazamientos.
b) Calcular la longitud final de la diagonal *AD* usando la matriz de deformaciones finitas de Lagrange.
c) Calcular la longitud final de la diagonal *AD* usando la matriz de deformaciones infinitesimales.

d) Determinar geométricamente la longitud final de la diagonal *AD* y compararla con los resultados obtenidos en (a) y (b).
e) A partir de los resultados obtenidos, deducir una fórmula para el error cometido en el cálculo de la longitud final de la diagonal *AD* en función del ángulo α. Calcular este error para $\alpha = 5°, 10°, 20°, 30°, 45°$ y $60°$.
f) Determinar el ángulo final entre el lado *AB* y la diagonal *AD*.

Solución: a) Tomando en cuenta que el campo de deformaciones es homogéneo y que se trata de un problema bidimensional donde no interviene la coordenada z, se puede suponer que

$$u(x, y) = ax + by + c$$
$$v(x, y) = dx + ey + f$$
$$w \equiv 0$$

Para determinar las constantes a, b, c, d, e y f, aplicamos estas ecuaciones a los desplazamientos conocidos de varios puntos de la lámina *ABCD* de la Fig. 2.32.

Para el punto $A(0,0)$ tenemos

$$u(0,0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$
$$v(0,0) = d \cdot 0 + e \cdot 0 + f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

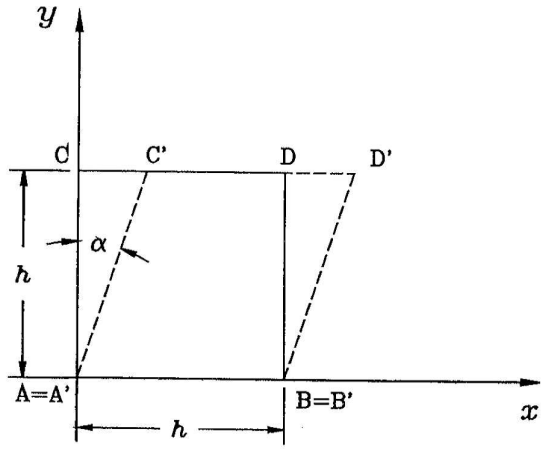


Figura 2.32 Lámina deformada del ejemplo 2.18

Para el punto $B(h,0)$

$$u(h,0) = a \cdot L + b \cdot 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$
$$v(h,0) = d \cdot L + e \cdot 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$$

Para el punto $C(0,L)$

$$u(0,h) = a \cdot 0 + b \cdot h + 0 = L \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad b = \operatorname{tg}\alpha$$
$$v(0,h) = d \cdot 0 + e \cdot h + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$$

Entonces el campo de desplazamientos viene dado por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= y \operatorname{tg}\alpha \\ v = w &\equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

b) Para calcular la longitud final de la diagonal AD usando el concepto de deformación finita, aplicamos la Ec. de transformación (2.85)

$$L_n = \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}^T = 1/\sqrt{2}\ (1, 1, 0)$ es el vector unitario en la dirección de la diagonal AD y $\mathbf{L}$ es la matriz de deformaciones finitas de Lagrange

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha & 0 \\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha & \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenida a partir del campo de desplazamientos definido por las Ecs. (a) mediante la aplicación directa de las relaciones (2.83).

Entonces, la deformación normal finita en la dirección de la diagonal AD viene dada por la expresión

$$L_n = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha(2 + \operatorname{tg}\alpha) \qquad \text{(b)}$$

Aplicando la definición (2.79) tenemos que

$$L_n = \frac{1}{2}\frac{\overline{A'D'}^2 - \overline{AD}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{A'D'}^2}{\overline{AD}^2} - 1\right)$$

Luego

$$\overline{A'D'} = \overline{AD}\sqrt{1 + 2L_n} = h\sqrt{2 + 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

c) La deformación normal infinitesimal en la dirección de la diagonal AD es

$$\varepsilon_n = \frac{\overline{A'D'} - \overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}} - 1$$

Luego

$$\overline{A'D'} = \overline{AD}(1 + \varepsilon_n) = \sqrt{2}h(1 + \varepsilon_n)$$

Ahora bien,

$$\varepsilon_n = \mathbf{n}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}^T = 1/\sqrt{2}\ (1, 1, 0)$ es, de nuevo, el vector unitario en la dirección de la diagonal AD, mientras que $\boldsymbol{\varepsilon}$ es la matriz de deformaciones infinitesimales

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha & 0 \\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenida también a partir del campo de desplazamientos definido por las Ecs.(a) pero ahora mediante la aplicación de las relaciones deformación-desplazamiento (2.22).

Entonces

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

y

$$\overline{A'D'} = \sqrt{2}h(1+\varepsilon_n) = \frac{h}{\sqrt{2}}(2+\operatorname{tg}\alpha)$$

d) Usando el teorema de Pitágoras tenemos que (ver Fig. 2.32):

$$\overline{A'D'} = \sqrt{(h+h\operatorname{tg}\alpha)^2 + h^2} = h\sqrt{2+2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

expresión que coincide exactamente con la fórmula obtenida mediante el uso del concepto de deformación finita.

e) El error cometido en el cálculo de la longitud final de la diagonal AD cuando se usan deformaciones infinitesimales viene dado por

$$\%\,error = \frac{h\sqrt{2+2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha} - h(2+\operatorname{tg}\alpha)/\sqrt{2}}{h\sqrt{2+2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}} \times 100$$

$$= \left[1 - \frac{2+\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2(2+2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)}}\right] \times 100$$

En la Tabla 2.1 se muestra este error para α = 5°, 10°, 20°, 30°, 45° y 60°. Como es de esperar, el error crece a medida que se incrementa la deformación. Nótese, sin embargo, que el error es relativamente pequeño aún para valores moderadamente altos del ángulo α, lo cual explica parcialmente al amplio y exitoso uso que ha tenido la teoría de las deformaciones infinitesimales durante tantos años.

Tabla 2.2 Error para varios valores del ángulo α en el ejemplo 2.18

α	Relación $\overline{A'D'}/\overline{AD}$ usando		% Error
	Defor. infinitesimales	Defor. Finitas	
5°	1.0437	1.0447	0.09
10°	1.0882	1.0917	0.33
20°	1.1820	1.1959	1.16
30°	1.2887	1.3206	2.42
45°	1.5000	1.5811	5.13
60°	1.8660	2.0572	9.29

f) El ángulo final θ entre el lado AB y la diagonal AD se puede determinar geométricamente como (ver Fig. 2.32)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{h+h\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$$

Luego

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

Problemas

2.1 La estructura rígida $ABCD$ mostrada en la Fig. P.2.1 se encuentra en posición horizontal cuando los cables EF, DG y CH están indeformados y libres de cargas. Determine la deformación axial de los cables EF y CH cuando, al aplicar una fuerza P en el punto A, la deformación axial del cable DG es 4×10^{-4}.

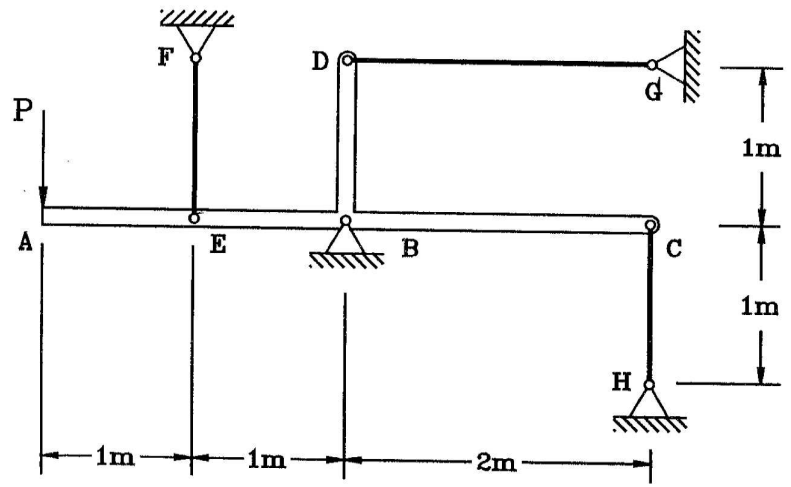


Figura P.2.1

2.2 La estructura mostrada en la Fig. P.2.2 está formada por tres barras deformables *AD*, *BD* y *CD* articuladas entre sí en el punto *D* y articuladas en sus otros extremos a los soportes *A*, *B* y *C*. Determine la deformación axial de cada una de las barras cuando, bajo la acción de una fuerza *P* desconocida, el punto *D* se desplaza simultáneamente 2 mm hacia la derecha y 1 mm hacia abajo.

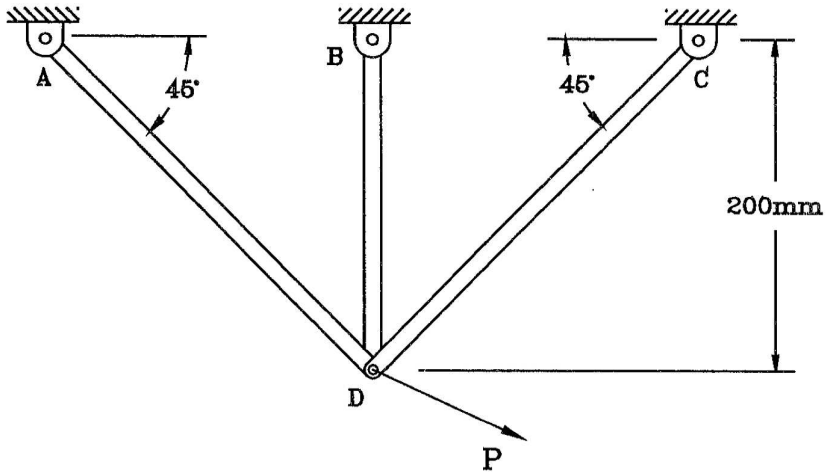


Figura P.2.2

2.3 Un anillo de sección circular se coloca en el extremo superior del cono rígido mostrado en la Fig. P.2.3 sin ejercer ninguna presión sobre éste. En esta posición el diámetro interno del anillo coincide con el diámetro *D* del extremo del cono. Determine la deformación normal circunferencial que experimenta el anillo cuando éste es desplazado una distancia *h* hasta ocupar la posición mostrada con líneas de trazos.

2.4 El campo de desplazamientos en un sólido viene dado por

$$u = 2 + (x + y + 3z) \times 10^{-3}$$
$$v = 3 + (x - y - 2z) \times 10^{-3}$$
$$w = 1 + (-3x + 2y + z) \times 10^{-3}$$

a) Determine el vector que une a los puntos $P(100,100,100)$ y $Q(0, 100, -100)$ en la configuración deformada del sólido.

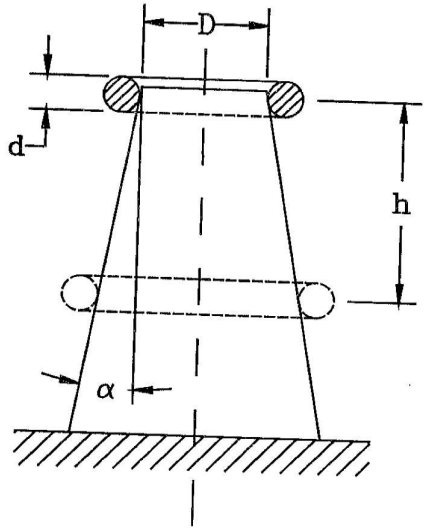


Figura P.2.3

b) Usando álgebra vectorial, calcule la variación de longitud del segmento $\overline{PQ}$ y la variación del ángulo entre los vectores OP y $\overline{OQ}$, siendo O el origen del sistema de coordenadas.

c) Compare los resultados obtenidos en (b) con aquellos que se deducirían calculando la matriz de deformaciones y utilizando las ecuaciones de transformación correspondientes.

2.5 El campo de desplazamientos en un sólido está descrito por

$$u = (x + 2y + 3z) \times 10^{-3}$$
$$v = (3x - y + 2z) \times 10^{-3}$$
$$w = (x + 2y - z) \times 10^{-3}$$

a) Determine el vector que une a los puntos $A(1,2,1)$ y $B(5, 4, 3)$ en la configuración deformada del sólido.

b) Determine el vector de posición del punto $C(2,1,1)$ en la configuración deformada.

c) Usando álgebra vectorial, calcule la deformación normal de los segmentos AB y OC, siendo O el origen del sistema de coordenadas.

d) Compruebe que el vector de posición del punto C es paralelo al vector que une los puntos A y B en la configuración inicial y demuestre que estos dos vectores permanecen paralelos en la configuración deformada del sólido.

2.6 Bajo la acción de un sistema de cargas, la lámina de acero $ABCD$ de 200 mm × 200 mm se deforma hasta llegar a la configuración $A'B'C'D'$ mostrada con líneas de trazos en la Fig. P2.6. Las dimensiones y los desplazamientos en esta figura están expresados en *mm*. Si el estado de deformaciones es idéntico en cada punto de la lámina, determine las componentes de deformación normal y tangencial en el plano xy.

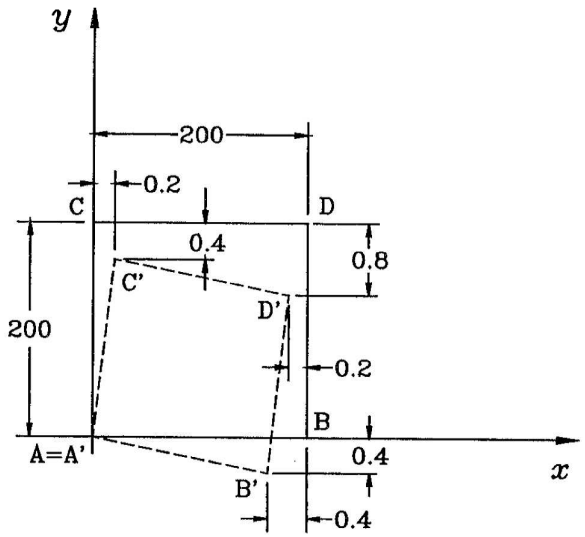


Figura P.2.6

2.7 Una lámina de acero $ABCD$ de 10 cm × 10 cm se deforma hasta la configuración $A'B'C'D'$ mostrada con líneas de trazos en la Fig. P2.7. Considerando que las dimensiones y los desplazamientos en esta figura están expresados en *mm*:

a) Determine los campos de desplazamientos y de deformaciones.
b) Calcule las deformaciones ε_x, ε_y y γ_{xy} en los puntos A, B, C y D de la placa y confronte sus resultados con la geometría de la deformación indicada en la figura.

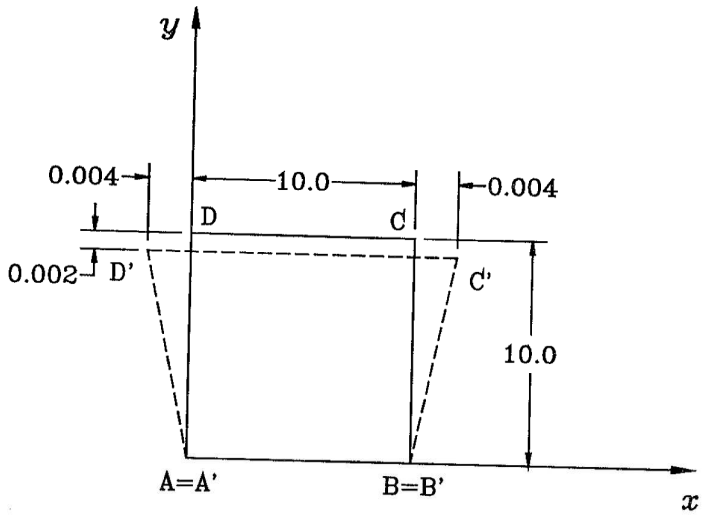


Figura P.2.7

2.8 La matriz de deformaciones en un punto de un sólido está definida por

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

a) Determine la deformación normal en la dirección del vector $\mathbf{n} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
b) Calcule la deformación tangencial entre $\mathbf{n}$ y el vector $\mathbf{m} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

2.9 El campo de desplazamientos en un sólido viene dado por

$$u = -1 + 0.002\,(x + y)$$
$$v = 3 + 0.001\,(y - 6x)$$
$$w = 0.001\,(2y - 2x + z)$$

Sabiendo que las dimensiones del tetraedro mostrado en la Fig. P.2.9 son $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$", determine:

a) La longitud final de los segmentos AB y CD.
b) El ángulo final, expresado en grados, entre los segmentos AB y CD.
c) La dirección en el plano yz según la cual la deformación normal es nula.

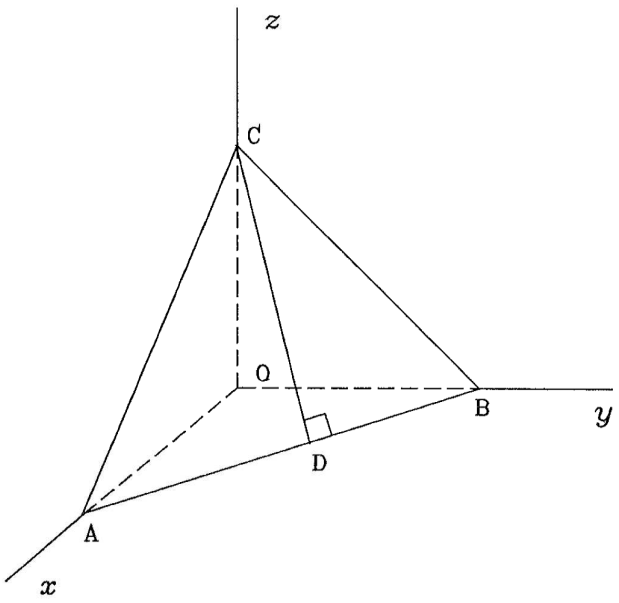


Figura P.2.9

2.10 El movimiento de un sólido está descrito por

$$\mathbf{R} = (x + y/3)\mathbf{i} + (x/3 + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

a) Determine el campo de desplazamientos y la matriz de deformaciones.
b) Encuentre la ecuación de la elipse en la cual se deforma la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.
c) Calcule la longitud de los semiejes de la elipse encontrada en (b) y el ángulo que ellos forman con los ejes de la circunferencia inicial.
d) Utilizando las longitudes calculadas en (c), determine las deformaciones normales según estos dos ejes a partir de la definición (2.8)
e) Utilizando el ángulo calculado en (c), determine las deformaciones normales en las direcciones de los ejes de la elipse mediante las ecuaciones de transformación (2.24).
f) ¿Coinciden los resultados calculados en (d) y (e)?

2.11 El campo de desplazamientos en un sólido viene dado por

$$u = y/\sqrt{3}$$
$$v = x/\sqrt{3}$$
$$w \equiv 0$$

a) Determine la dirección en el plano xy según la cual la deformación normal es nula.
b) Encuentre la ecuación de la elipse en la cual se deforma la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

2.12 Para analizar los esfuerzos en un recipiente cilíndrico sometido a una presión interna, se propone el campo de desplazamientos

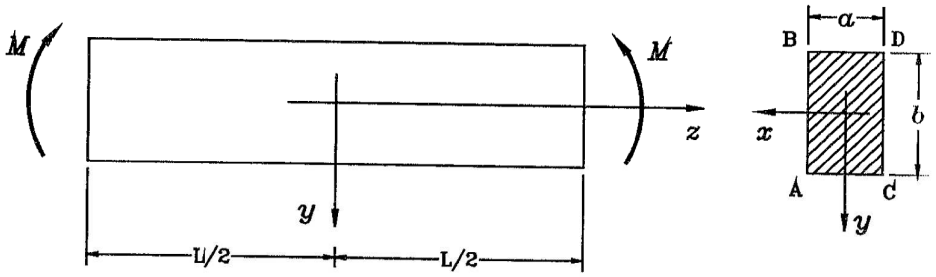
$$u = x\,f(r)$$
$$v = y\,f(r)$$
$$w \equiv 0$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia radial desde el eje del cilindro a un punto genérico de coordenadas (x, y) y f es una función desconocida de la variable r.

a) Demuestre que los puntos situados originalmente sobre una circunferencia contenida en un plano paralelo al plano xy, con centro en (0, 0) y radio a, se desplazan radialmente en ese plano hasta ubicarse en otra circunferencia con centro en (0, 0) y radio $a' = a\,[1 + f(a)]$.
b) ¿Qué significado físico o geométrico le atribuiría usted a la función $f(r)$?

2.13 El campo de desplazamientos en una viga prismática (ver Fig. P.2.13a) sometida a sendos momentos de magnitud M en sus extremos viene dado por

$$u = -\frac{\nu M}{EI}xy$$
$$v = \frac{M}{2EI}(\nu x^2 - \nu y^2 - z^2)$$
$$w = \frac{M}{EI}yz$$



(a) (b)

Figura P.2.13 a)Viga sometida a flexión pura en el plano *yz*;
b) Sección transversal de la viga.

donde I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje x, E es el módulo de elasticidad del material y ν es el módulo de Poisson.

a) Determine la matriz de deformaciones.
b) Si la viga se visualiza como una barra constituida por largos filamentos paralelos al eje z, compruebe que los filamentos situados en el plano $y = 0$ no cambian de longitud. A este plano se le da el nombre de *plano neutro*.
c) Compruebe que los filamentos de la viga situadas por debajo del plano neutro ($y > 0$) se alargan, mientras que aquellos ubicados por encima de éste ($y < 0$) se contraen.
d) Demuestre que los puntos situados en el eje z experimentan únicamente desplazamientos en la dirección vertical, variando éstos en forma parabólica con la coordenada z.
e) Considerando el caso de una viga de sección transversal rectangular de dimensiones $a \times b$ (ver Fig. P.2.13b), demuestre que si las deformaciones son pequeñas comparadas con la unidad, entonces en la sección central $z = 0$ los lados $x = \pm a/2$ se desplazan y rotan permaneciendo rectos, mientras que los lados $y = \pm b/2$ se transforman en parábolas. Dibuje la sección transversal $z = 0$ en su configuración deformada y determine los desplazamientos u, v y w de los vértices $A(a/2, b/2, 0)$, $B(a/2, -b/2, 0)$, $C(-a/2, b/2, 0)$ y $D(-a/2, -b/2, 0)$. *Nota*: Recuerde que para una sección rectangular el momento de inercia es $I = ab^3/12$.

2.14 Uno de los elementos más comúnmente utilizados en el análisis d problemas bi-dimensionales con el método del elemento finito es denominado *triángulo de deformación constante*. Para este tipo d elemento se supone que los desplazamientos $u(x, y)$ y $v(x, y)$ varían linealmente con las coordenadas x y y.

a) Demuestre que el campo de desplazamientos puede expresarse como

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{3} u_i N_i(x,y)$$

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{3} v_i N_i(x,y)$$

donde u_i y v_i ($i = 1, 2, 3$) son los desplazamientos en las direcciones y y y, respectivamente, de los de los puntos situados en los vértices del triángulo (ver Fig. P.2.14), mientras que $N_i(x, y)$ son las llamadas *funciones de interpolación* definidas por

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A}\left[x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right]$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A}\left[x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\right]$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A}\left[x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right]$$

siendo A el área del triángulo.

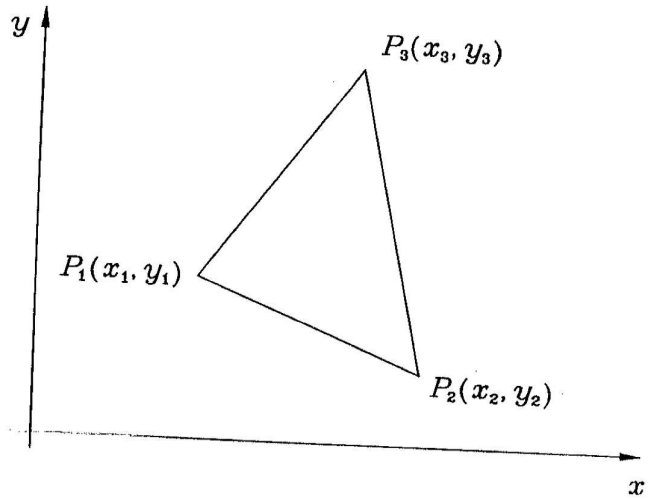


Figura P.2.14

b) Determine las componentes de deformación y compruebe que el campo de deformaciones es homogéneo en el interior del triángulo.
c) Particularice los resultados anteriores para el caso de un triángulo en el cual $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = h$, $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = h$. Interprete sus resultados ayudándose de un dibujo en el cual se muestren los desplazamientos genéricos de los vértices.

2.15 Para el estado de deformaciones de la Fig. P2.15, calcule la deformación tangencial máxima en el plano *xy*. Las dimensiones y los desplazamientos en esta figura están expresados en *mm*.

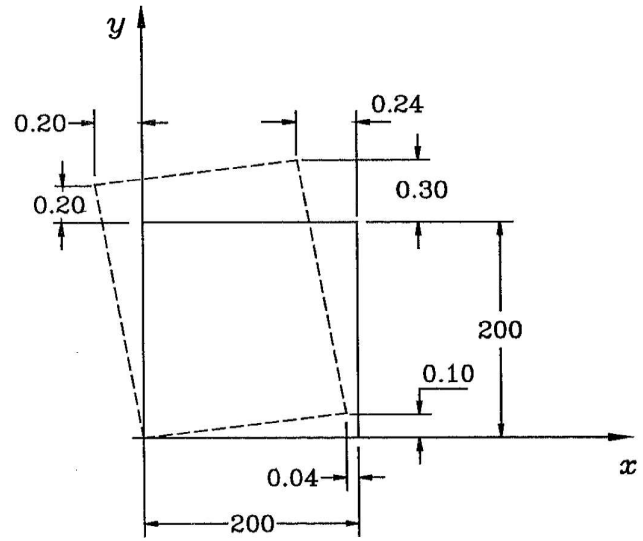


Figura P.2.15

2.16 El estado de deformaciones en un punto de un sólido está definido por

$$\varepsilon_x = 0$$
$$\varepsilon_y = -9 \times 10^{-4}$$
$$\gamma_{xy} = 6 \times 10^{-4}$$

Determine gráficamente las deformaciones principales y la deformación tangencial máxima en el plano *xy*. Determine también la orientación de los ejes respecto a los cuales la deformación tangencial en el plano *xy* es máxima. Verifique en forma analítica los resultados obtenidos.

2.17 Alrededor de un punto sobre la superficie de una pieza se trazó un cuadradito de 2 cm de lado. Al ser la pieza sometida a un cierto sistema de cargas, el cuadradito se deformó como se indica en la Fig. P.2.17. Tomando en cuenta que en esta figura las dimensiones y los desplazamientos están en expresados en *cm*:
a) Evalúe las componentes de deformación en el plano *xy*.
b) Determine gráfica y analíticamente las direcciones principales en el plano *xy* y dibuje su orientación con relación a los ejes *x* y *y*.

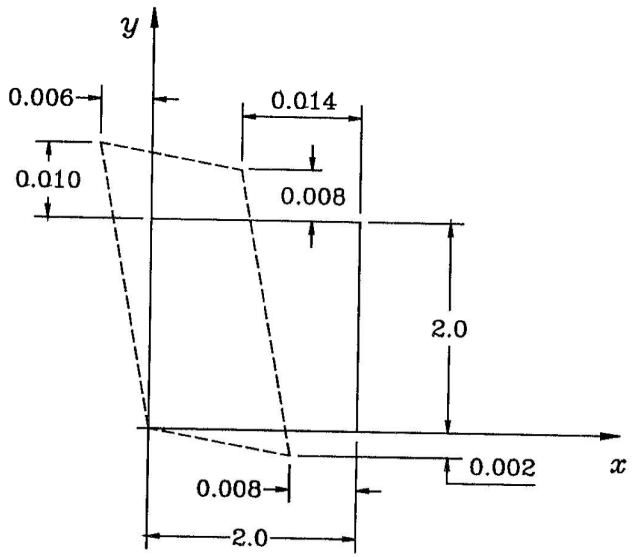


Figura P.2.17

2.18 Determine gráfica y analíticamente las deformaciones principales en el plano *xy* para el estado de deformaciones mostrado en la Fig. P.2.18. Las dimensiones están en expresadas en *cm*.

2.19 Para el estado de deformaciones definido por

$$\varepsilon_x = 6 \times 10^{-4}$$
$$\varepsilon_y = -4 \times 10^{-4}$$
$$\varepsilon_z = 12 \times 10^{-4}$$
$$\gamma_{xy} = 2 \times 10^{-4}$$
$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

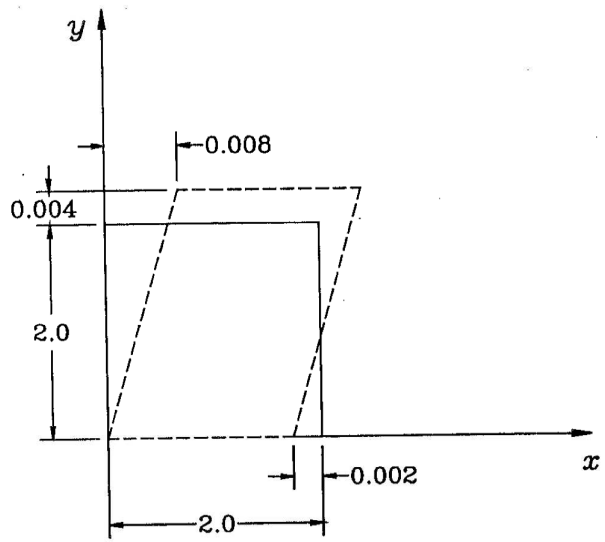


Figura P.2.18

Determine gráficamente:

a) Las deformaciones principales.
b) La deformación tangencial máxima.
c) Las deformaciones normal y tangencial en un plano cuya normal forma ángulos de 30°, 60° y 90° con los ejes x, y y z, respectivamente.

Verifique en forma analítica los resultados obtenidos.

2.20 Un estado plano de deformaciones está definido de la manera siguiente (ver Fig. P.2.20):

$$\varepsilon_y = -4\times10^{-4}$$
$$\varepsilon_{x1} = 5\times10^{-4}$$
$$\gamma_{x1y1} = -1\times10^{-4}$$

Determine gráfica y analíticamente las deformaciones principales.

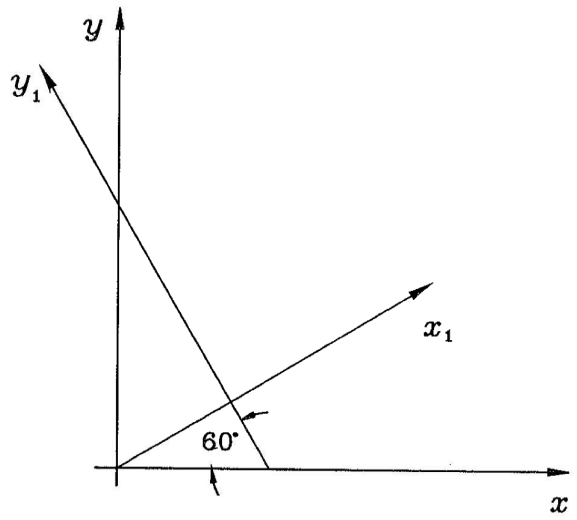


Figura P.2.20

2.21 En un punto sobre la superficie de un elemento de máquina donde existe un estado plano de esfuerzos se sabe que la deformación tangencial máxima es 4×10^{-4} y que la suma de las deformaciones normales según dos direcciones perpendiculares entre sí y tangentes a la superficie de la pieza en el punto considerado es 2×10^{-4}. Determine en forma gráfica y analítica las deformaciones principales.

2.22 Un estado plano de deformaciones está definido de la manera siguiente (ver Fig. P.2.22):

$$\varepsilon_{x1} = -8\times10^{-4}$$
$$\varepsilon_{y1} = -8\times10^{-4}$$
$$\gamma_{x1y1} = 6\times10^{-4}$$
$$\gamma_{x2y2} = 3\times10^{-4}$$

Determine gráficamente:

a) Las deformaciones principales.
b) El ángulo φ.

Verifique en forma analítica los resultados obtenidos.

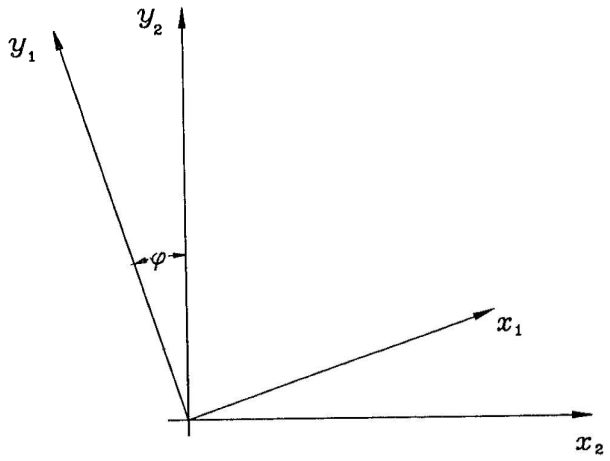


Figura P.2.22

2.23 En un punto de un sólido se conocen las siguientes componentes de deformación (ver Fig. P.2.23):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -4\times10^{-4}\\
\varepsilon_y &= 8\times10^{-4}\\
\varepsilon_z &= 8\times10^{-4}\\
\varepsilon_{x1} &= 10\times10^{-4}\\
\gamma_{x1y1} &= 5\times10^{-4}\\
\gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0
\end{aligned}$$

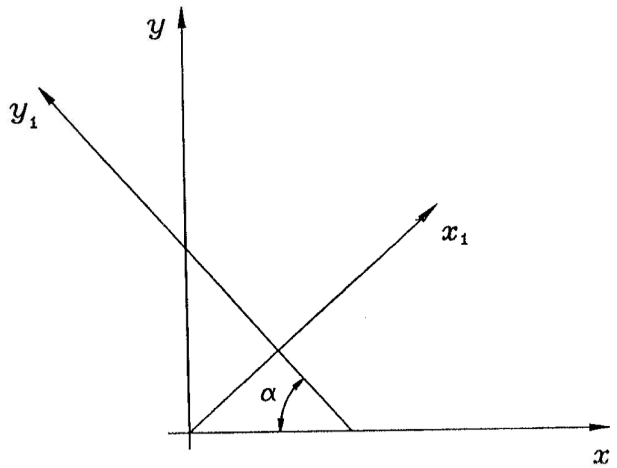


Figura P.2.23

Determine gráficamente:

a) Las deformaciones principales.
b) La deformación tangencial máxima.
c) El ángulo α.

Verifique en forma analítica los resultados obtenidos.

2.24 Para el estado de deformaciones definido por (ver Fig. P.2.24):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= 4\times10^{-4}\\
\varepsilon_y &= 2\times10^{-4}\\
\varepsilon_{x1} &= 5\times10^{-4}
\end{aligned}$$

determine gráfica y analíticamente las deformaciones principales y la deformación tangencial máxima en el plano xy.

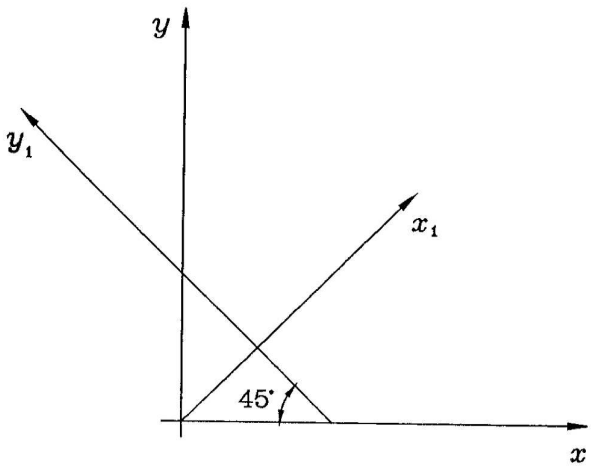


Figura P.2.24

2.25 Alrededor de un punto ubicado sobre la superficie de una pieza se trazó un cuadradito de 2 cm de lado. Al ser sometida la pieza a un cierto sistema de cargas, el cuadradito se deformó hasta tener la configuración señalada con líneas de trazos en la Fig. P.2.25a. A continuación se retira el sistema de cargas y se traza alrededor del mismo punto otro cuadradito de 2 cm de lado con la orientación ahora definida por sistema de referencia y_1y_1, tal como se muestra en la Fig. P.2.25b. Posteriormente se somete otra vez la pieza al mismo sistema de cargas y el nuevo

cuadradito se deforma como se indica en esta figura. Determine en forma gráfica y analítica las componentes de deformación en el plano xy.

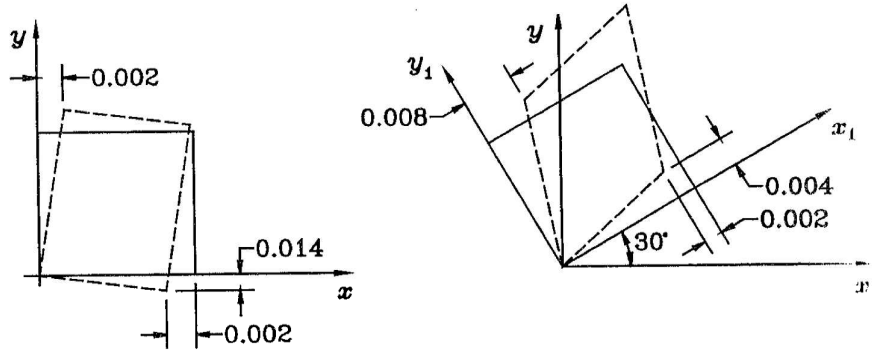


Figura P.2.25

2.26 En un punto de un sólido se conocen las deformaciones normales

$$\varepsilon_a = -1\times10^{-3}$$
$$\varepsilon_b = 7.2\times10^{-3}$$
$$\varepsilon_c = 5\times10^{-3}$$

en las direcciones a, b y c mostradas en la Fig. P.2.26. Se sabe, además, que $\varepsilon_z = -6\times10^{-3}$ y que $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

Determine gráfica y analíticamente:

a) La matriz de deformaciones.
b) Las deformaciones principales y sus respectivas direcciones.
c) La deformación tangencial máxima.
d) La deformación normal en la dirección del vector que forma ángulos de 30°, 60° y 90° con los ejes x, y y z, respectivamente.

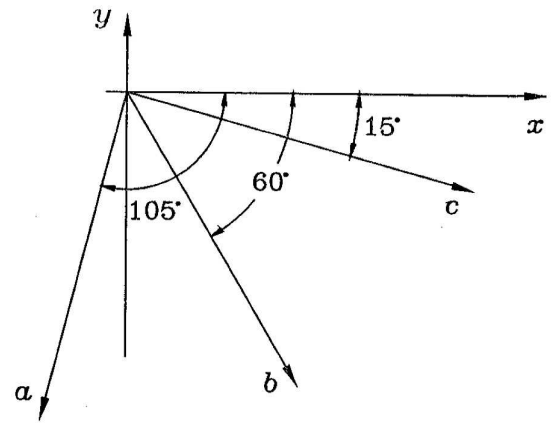


Figura P.2.26

2.27 El tetraedro mostrado en la Fig. P.2.27 se deforma de manera tal que sus dimensiones finales son:

$$\overline{O'A'}=1.002",\quad \overline{O'B'}=1.001",\quad \overline{O'C'}=1.001"$$
$$\overline{A'B'}=1.4192",\quad \overline{C'D'}=1.2237"$$

Asimismo, el ángulo inicialmente recto entre los segmentos AB y CD se distorsiona hasta tener un valor final de 89.70°. Determine la matriz de deformaciones sabiendo que las dimensiones iniciales del tetraedro son $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1"$.

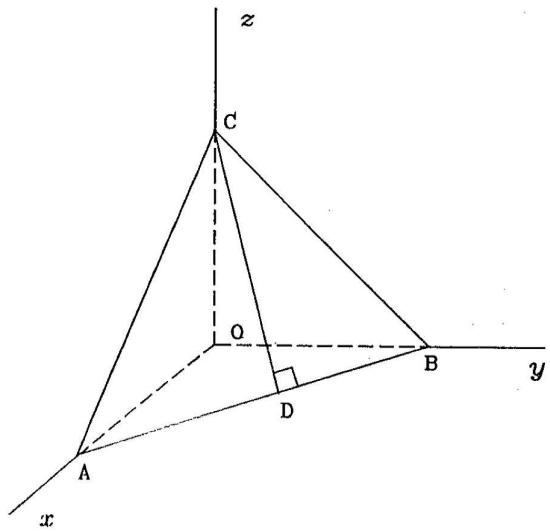


Figura P.2.27

2.28 Por efecto de un cierto sistema de cargas, la placa triangular *ABC* mostrada en la Fig. P.2.28 se deforma hasta ocupar la configuración *A'B'C'* mostrada con líneas de trazos. Determine en el punto *C* la deformación tangencial entre los segmentos *CA* y *CB*.

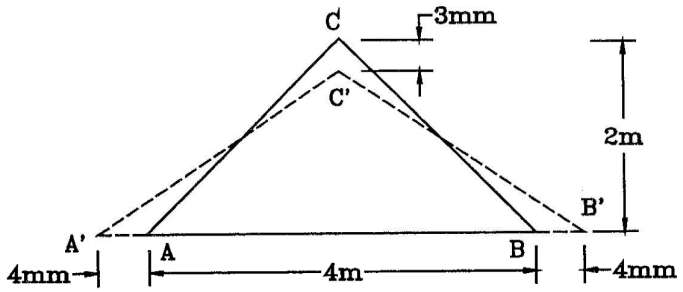


Figura P.2.28

2.29 El estado de deformaciones en un punto de un sólido está definido como

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

¿Puede afirmarse que este estado de deformaciones es plano? Argumente apropiadamente su respuesta.

2.30 Sobre la superficie de un elemento de máquina se trazó el triángulo *ABC* mostrado en la Fig.P.2.30. Cuando la pieza se sometió a un determinado sistema de cargas, los vértices *A*, *B* y *C* se desplazaron a unas nuevas posiciones *A'*, *B'* y *C'*. Al medir estos desplazamientos, se determinó que el vértice *A* se desplazó hacia la derecha 0.1 mm, el vértice *B* se desplazó 0.2 mm hacia la derecha y 0.3 mm hacia arriba, mientras que el vértice *C* se desplazó 0.3 mm hacia la izquierda y 0.2 mm hacia abajo.
Suponiendo que el campo de deformaciones en la zona ocupada por el triángulo es uniforme, utilice círculos de Mohr o las ecuaciones de transformación para determinar:

a) La longitud final de la hipotenusa *AC*
b) El ángulo interno final entre los lados *AB* y *BC*.

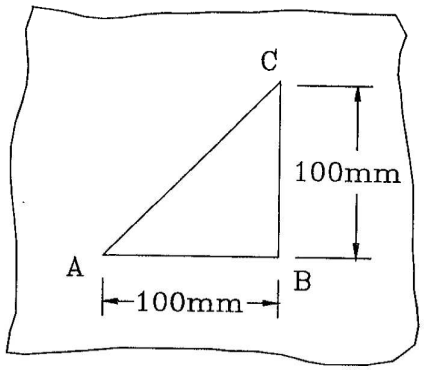


Figura P.2.30

2.31 Debido a un cierto sistema de cargas, la placa *ABCD* mostrada en la Fig. P.2.31 se deforma hasta ocupar la configuración *A'B'C'D'* mostrada con líneas de trazos. Determine:

a) La deformación normal en la dirección de la diagonal *BD*.
b) La deformación tangencial entre los segmentos *CD* y *CB* en el punto *C*.
c) La deformación tangencial entre las diagonales *AC* y *BD* en el centro de la lámina.

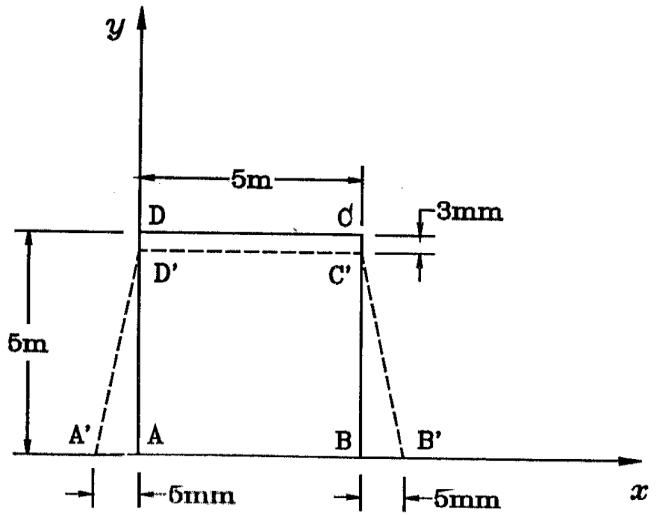


Figura P.2.31

2.32 En un ensayo llevado a cabo sobre la superficie de una pieza con una roseta rectangular se obtuvo

$$\varepsilon_a = 2\times10^{-3}$$
$$\varepsilon_b = 1.5\times10^{-3}$$
$$\varepsilon_c = -2\times10^{-3}$$

Determine las deformaciones principales en la superficie de medición.

2.33 En un ensayo llevado a cabo sobre la superficie de una pieza con una roseta delta se obtuvo

$$\varepsilon_a = 2\times10^{-3}$$
$$\varepsilon_b = -4\times10^{-3}$$
$$\varepsilon_c = 8\times10^{-3}$$

Determine las deformaciones principales en la superficie de medición.

2.34 Considere el campo de deformaciones

$$\varepsilon_x = 1 + 3x^2 + y^2 + y^4$$
$$\varepsilon_y = 1 + 3x^2 + 5y^4$$
$$\gamma_{xy} = 1 + 4xy + 2xy^3$$
$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Compruebe que se satisfacen las ecuaciones de compatibilidad y determine el campo de desplazamientos $\mathbf{s}(x, y, z)$ sabiendo que el desplazamiento y la rotación en el punto (0, 0, 0) son nulos.

2.35 Considere el campo de deformaciones

$$\varepsilon_x = 2x + 3y^2 - 2z$$
$$\varepsilon_y = 2(y + z)$$
$$\varepsilon_z = 2z$$
$$\gamma_{xy} = 3xy + z$$
$$\gamma_{xz} = -x - y + z$$
$$\gamma_{yz} = y + z$$

Compruebe que se satisfacen las ecuaciones de compatibilidad y determine el campo de desplazamientos $\mathbf{s}(x, y, z)$ sabiendo que el desplazamiento y la rotación en el punto (0, 0, 0) son nulos.

2.36 En la solución de un problema de análisis de esfuerzos se obtuvieron las dos soluciones siguientes:

Solución 1	Solución 2
$u_1 = -6xy + y + z + 1$	$u_2 = -6xy - y + 2z - 1$
$v_1 = 3x^2 - 3y^2 - 9z^2 - x + 2z - 1$	$v_2 = 3x^2 - 3y^2 - 9z^2 + x + 3z + 2$
$w_1 = 18yz - x - 2y + 2$	$w_2 = 18yz - 2x - 3y + 3$

Demuestre que la única diferencia entre ambas soluciones está representada por un desplazamiento rígido infinitesimal.

2.37 Se dice que el desplazamiento de un sólido es rígido infinitesimal si la matriz de deformaciones infinitesimales es idénticamente nula para todo punto $P(x, y, z)$ del sólido.

a) A partir de esta definición, utilice las relaciones deformación-desplazamiento para determinar la estructura general de los desplazamientos u, v y w correspondientes a un movimiento rígido infinitesimal.

b) Utilizando los desplazamientos u, v y w determinados en (a), evalúe la matriz de deformaciones finitas de Lagrange.

c) A partir de los resultados obtenidos, establezca conclusiones claras y precisas con relación a los conceptos de deformación finita e infinitesimal.

2.38 Considere el movimiento $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(t) + \mathbf{c}(t)\,\mathbf{r}$, donde $\mathbf{b}(t)$ es una función vectorial del tiempo y $\mathbf{c}(t)$ es una matriz de 3×3 cuyas componentes son funciones escalares del tiempo. Demuestre que este movimiento es rígido si, y solo si, $\mathbf{c}(t)\,[\mathbf{c}(t)]^T = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.

2.39 El campo de desplazamientos en un sólido viene dado por

$$u = 2 - y/10 + z/4$$
$$v = 1 + x/10 - z/5$$
$$w = 4 - x/4 + y/5$$

a) Determinar el vector que une a los puntos $A(20,20,20)$ y $B(-20,20,0)$ en la configuración deformada del sólido.
b) Usando álgebra vectorial, calcule la variación de longitud del segmento $\overline{AB}$ y la variación del ángulo entre los vectores $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, siendo O el origen del sistema de coordenadas.
c) Realice los cálculos indicados en (b) utilizando la matriz de deformaciones infinitesimales y las ecuaciones de transformación correspondientes.
d) Realice los cálculos indicados en (b) utilizando la matriz de deformaciones finitas de Lagrange y las ecuaciones de transformación correspondientes.
e) Establezca sus conclusiones.

2.40 Para el movimiento descrito en el problema 2.10, determine:
a) La matriz de deformaciones finitas de Lagrange.
b) Las deformaciones principales finitas de Lagrange.

2.41 Para el campo de desplazamientos del problema 2.11, determine:
a) La deformación tangencial finita entre los vectores **i** y **j**.
b) La dirección en el plano xy según la cual la deformación normal finita es nula.

2.42 a) Demuestre que la deformación normal infinitesimal ε_n en la dirección del vector **n** puede expresarse como

$$\varepsilon_n = \sqrt{1+2L_n} - 1$$

donde L_n es la deformación normal finita en la dirección del mismo vector.
b) A partir de esta expresión, demuestre que si $L_n \ll 1$, entonces $\varepsilon_n \approx L_n$.
(*Sugerencia*: Expanda la función $\sqrt{1+2L_n}$ en su serie de Taylor alrededor de $L_n = 0$).

2.43 Para la placa $ABCD$ mostrada en la Fig. P.2.43,
a) Determine el campo de desplazamientos.
b) Calcule el ángulo final entre los segmentos BD y CD utilizando las teorías de deformaciones finitas e infinitesimales.
c) Compare los resultados anteriores con el ángulo que se obtendría mediante cálculos geométricos.

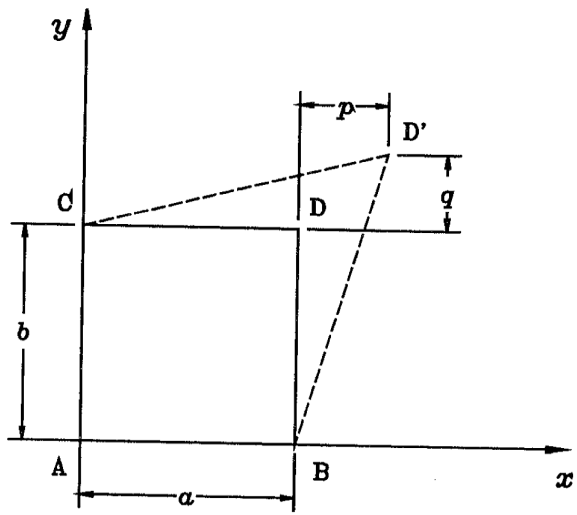


Figura P.2.43

2.44 La placa mostrada en la Fig. P.2.44 se deforma de manera tal que todos los segmentos verticales giran un mismo ángulo α conservando su longitud inicial.
a) Determine el campo de desplazamientos.
b) Calcule las deformaciones infinitesimales ε_x, ε_y y γ_{xy}.
c) Calcule las deformaciones finitas L_x, L_y y L_{xy}.
d) Compare los resultados obtenidos en (b) y (c) y establezca sus conclusiones.
e) Determine la longitud final de la diagonal AD utilizando deformaciones finitas e infinitesimales. Compruebe que el valor obtenido mediante la teoría de las deformaciones finitas coincide con aquél que se deduciría mediante cálculos geométricos.
f) ¿En cuáles aspectos se diferencia el campo de desplazamientos de este problema con el correspondiente al ejemplo 2.18?

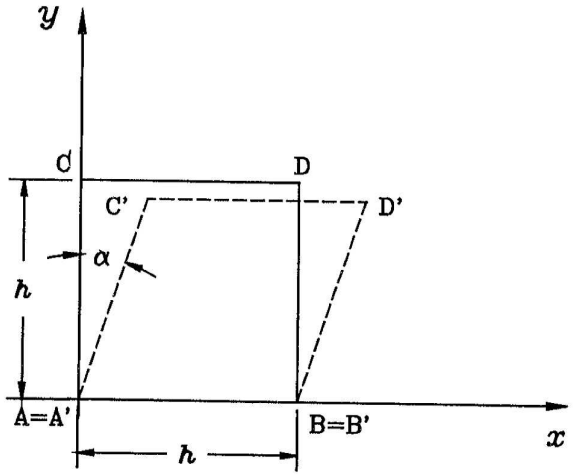


Figura P.2.44

Capítulo 3

Relaciones Esfuerzo-Deformación

3.1 Introducción

En los capítulos precedentes hemos analizado el efecto de las cargas externas aplicadas a un cuerpo sólido de una manera separada en términos de los esfuerzos que se generan internamente y de las deformaciones que en él se producen. Con la única excepción de suponer que el sólido estaba constituido por un medio continuo, dichos análisis se llevaron a cabo sin considerar en ningún momento la naturaleza ni las propiedades del material. Esto significa que lo que se ha hecho es, esencialmente, un estudio del equilibrio de fuerzas, por un lado, y un análisis cinemático, por el otro, ambos de una manera totalmente independiente. De esta forma no resulta difícil concluir que los resultados obtenidos son válidos para cualquier material, sea éste un sólido, un líquido o un gas, siempre que éste cumpla con la hipótesis de medio continuo.

En este capítulo nos proponemos mostrar, a través de un modelo lineal, que los esfuerzos y las deformaciones en cada punto de un sólido están

relacionados a través de ciertas propiedades del material que deben ser obtenidas de manera experimental.

A las relaciones entre los esfuerzos y la deformaciones, cualquiera sea el modelo considerado, se les da el nombre de *ecuaciones constitutivas* del material. Estas relaciones pueden ser diferentes para materiales de distinta naturaleza. Pueden, además, ser diferentes para elementos construidos del mismo material pero sometidos a condiciones o sistemas de cargas distintos, y pueden depender también de ciertas condiciones ambientales, como la temperatura y la humedad, así como del tiempo de aplicación de las cargas[37].

Nuestro estudio, sin embargo, estará restringido al análisis lineal de esfuerzos en materiales sólidos, razón por la cual las relaciones esfuerzo deformación que presentaremos serán bastante simples, pero aplicables desde un punto de vista práctico a una amplia variedad de problemas de ingeniería. En ellas se supondrá que las propiedades del material son constantes, uniformes e independientes de las condiciones ambientales.

Desde un punto de vista formal, el estudio de las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones se hace imprescindible debido a la necesidad de completar el sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento del sólido. En efecto, en la última sección del Cap. 1 se pudo constatar que para determinar las seis componentes de la matriz de esfuerzos σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz} en función de la posición se tenía a disposición únicamente las tres ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Con la finalidad de completar la formulación del problema, en el Cap. 2 se introdujeron los conceptos de deformación y desplazamiento, con lo cual se agregaron nuevas variables al problema -las seis componentes de la matriz de deformaciones ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz} y γ_{yz} y los tres desplazamientos u, v y w- para llegar a un total de quince funciones incógnita. Sin embargo, solo fue posible el

[37] Para un estudio detallado de estos efectos, el lector puede consultar, por ejemplo, el libro de Norman E. Dowling, "*Mechanical Behavior of Materials*", Prentice-Hall, New Jersey, 1993.

planteamiento de seis nuevas ecuaciones constituidas por las relaciones deformación-desplazamiento

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.2a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.2b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.2c}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.2d}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{3.2e}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{3.2f}$$

Las Ecs. (3.1) y (3.2) conforman un sistema de nueve ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en las quince funciones incógnita σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}, u, v y w. Obviamente, el número de ecuaciones disponibles es insuficiente, por lo que se hace necesario completar la formulación mediante un estudio de las relaciones entre las componentes de las matrices de esfuerzos y deformaciones.

3.2 Ley de Hooke

Presentaremos aquí un modelo muy simple de relaciones esfuerzo-deformación para materiales homogéneos con comportamiento elástico, lineal e isótropo.

Se dice que un material es *homogéneo* cuando sus propiedades físicas son las mismas en cada uno de sus puntos. Por otra parte, se dice que es *elástico* cuando el material recupera completamente sus dimensiones originales después de retirar las cargas que produjeron en él determinadas deformaciones. Si las dimensiones no se recuperan por completo, permaneciendo ciertas deformacio-

nes permanentes, se dice que el comportamiento del material es plástico o inelástico.

Cuando las deformaciones que experimenta un material son muy pequeñas comparadas con la unidad (usualmente menores que 0.1%), puede suponerse que la relación entre los esfuerzos y las deformaciones es *lineal*. Puede demostrarse, usando argumentaciones de tipo energético, que si un material se comporta linealmente entonces es elástico[38]. La proposición inversa, sin embargo, no es cierta. Es decir, un material puede ser elástico sin que ello implique necesariamente una relación lineal entre los esfuerzos y las deformaciones. Este es el comportamiento típico que exhiben los elastómeros, como el caucho, por ejemplo.

Por último, se dice que un material es *isótropo* cuando en un punto dado las propiedades físicas son las mismas en todas las direcciones. Es decir, un material es isótropo cuando las propiedades del material no son de naturaleza vectorial, no existiendo, por lo tanto, direcciones preferentes. Un material que no es isótropo se dice que es *anisótropo*, como es el caso de la madera, por ejemplo.

Desde el advenimiento del computador digital se han venido desarrollando modelos físicos más complejos[39] que pueden ser aplicados en la solución de problemas de diseño utilizando técnicas numéricas como el método del elemento finito. Esto es particularmente cierto cuando en el diseño de componentes mecánicos y estructurales se tiene interés en el aprovechamiento óptimo de la capacidad de los materiales, así como también cuando se utilizan nuevos materiales ó materiales compuestos en los cuales el modelo descrito se desvía apreciablemente de las observaciones experimentales. Sin embargo, en las aplicaciones habituales de ingeniería, con la utilización de materiales como el acero, el aluminio, etc., el modelo de comportamiento basado en las hipótesis de homogeneidad, elasticidad, linealidad e isotropía proporciona excelentes resultados, con la conveniencia adicional de conducir a una formulación matemática relativamente sencilla, tal como iremos descubriendo en el transcurso del texto.

Consideremos entonces un material homogéneo, elástico, lineal e isótropo. En virtud de las hipótesis de homogeneidad, elasticidad y linealidad, para todo punto del sólido puede suponerse que cada una de las componentes de la matriz de deformaciones que se genera depende linealmente de las componentes de la matriz de esfuerzos. Esto es

[38] Ver el libro de I. S. Sokolnikoff, *"Mathematical Theory of Elasticity"*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1974, pp. 58-65.

[39] Ver, por ejemplo, el libro de Irving H. Shames y Francis A. Cozzarelli, *"Elastic and Inelastic Stress Analysis"*, Prentice Hall, New Jersey, 1992.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= f_{11}\sigma_x + f_{12}\sigma_y + f_{13}\sigma_z + f_{14}\tau_{xy} + f_{15}\tau_{xz} + f_{16}\tau_{yz} \\
\varepsilon_y &= f_{21}\sigma_x + f_{22}\sigma_y + f_{23}\sigma_z + f_{24}\tau_{xy} + f_{25}\tau_{xz} + f_{26}\tau_{yz} \\
\varepsilon_z &= f_{31}\sigma_x + f_{32}\sigma_y + f_{33}\sigma_z + f_{34}\tau_{xy} + f_{35}\tau_{xz} + f_{36}\tau_{yz} \\
\gamma_{xy} &= f_{41}\sigma_x + f_{42}\sigma_y + f_{43}\sigma_z + f_{44}\tau_{xy} + f_{45}\tau_{xz} + f_{46}\tau_{yz} \\
\gamma_{xz} &= f_{51}\sigma_x + f_{52}\sigma_y + f_{53}\sigma_z + f_{54}\tau_{xy} + f_{55}\tau_{xz} + f_{56}\tau_{yz} \\
\gamma_{yz} &= f_{61}\sigma_x + f_{62}\sigma_y + f_{63}\sigma_z + f_{64}\tau_{xy} + f_{65}\tau_{xz} + f_{66}\tau_{yz}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

donde los coeficientes f_{ij} son 36 propiedades del material que deben ser determinadas experimentalmente. Estas propiedades suelen agruparse en una matriz de 6×6 denominada *matriz de flexibilidad*.

Antes de seguir con nuestro desarrollo general, consideremos primero el caso particular de una barra sometida únicamente a un esfuerzo en su dirección longitudinal. Si se escoge un sistema de coordenadas de manera que el eje x coincida con el eje de la barra, entonces al aplicar una carga en la dirección axial se generará únicamente un esfuerzo σ_x. Si este esfuerzo es de tracción (o compresión), la barra experimentará una elongación (o contracción) en la dirección del eje x y sendas contracciones (o dilataciones) en las direcciones y y z. La deformación en la dirección axial vendría dada por

$$\varepsilon_x = f_{11}\sigma_x \tag{3.4}$$

mientras que las deformaciones transversales serían

$$\varepsilon_y = f_{21}\sigma_x, \qquad \varepsilon_z = f_{31}\sigma_x \tag{3.5}$$

A la Ec. (3.4) se le llama *ley de Hooke*, en honor al científico inglés Robert Hooke (1635-1703), quien descubrió la ley de proporcionalidad entre cargas y alargamientos en 1678 mediante experimentos realizados con alambres y resortes[40]. Sin embargo, no fue sino a principios de del siglo XVIII cuando el científico inglés Thomas Young (1773-1829) introdujo el concepto del *módulo elasticidad E* como la constante de proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones.

[40] Stephen P. Timoshenko *"History of Strength of Materials"*, Dover Publications, New York, 1983, pp. 17-20.

Figura 3.2 Thomas Young[41] (1773-1829)

Este módulo de elasticidad, denominado también *módulo de Young*, fue medido experimentalmente por primera vez por el científico francés Louis Navier (1785-1836) en 1826, a cuyos efectos fue definido formalmente como el cociente entre el esfuerzo axial aplicado a una barra y la deformación unitaria longitudinal que ésta experimenta:

$$E = \sigma_x / \varepsilon_x \tag{3.6}$$

En 1830 el científico francés Simeon D. Poisson (1781-1840) demostró que, en el caso de una barra sometida a esfuerzos de tracción, la deformación axial ε_x debía ir acompañada de contracciones laterales de magnitud $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$. Usando entonces las Ecs. (3.4), (3.5) y (3.6), se concluye que $f_{11} = 1/E$ y $f_{21} = f_{31} = -\nu\varepsilon_x/E\varepsilon_x = -\nu/E$. Al coeficiente ν se le denomina *módulo de Poisson*.

Luego, para el caso de un estado de esfuerzos uniaxial como el descrito, las Ecs. (3.3) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x \end{aligned} \tag{3.7}$$

[41] Biografía en http://wisc.fau.edu/~jordanrg/bios/Young/Young_bio.htm

Figura 3.3 Simeon Poisson[42] (1781-1840)

Volviendo a nuestro caso general, si se invierten las relaciones (3.3) para expresar los esfuerzos en función de las deformaciones, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_x &= k_{11}\varepsilon_x + k_{12}\varepsilon_y + k_{13}\varepsilon_z + k_{14}\gamma_{xy} + k_{15}\gamma_{xz} + k_{16}\gamma_{yz} \\ \sigma_y &= k_{21}\varepsilon_x + k_{22}\varepsilon_y + k_{23}\varepsilon_z + k_{24}\gamma_{xy} + k_{25}\gamma_{xz} + k_{26}\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= k_{31}\varepsilon_x + k_{32}\varepsilon_y + k_{33}\varepsilon_z + k_{34}\gamma_{xy} + k_{35}\gamma_{xz} + k_{36}\gamma_{yz} \\ \tau_{xy} &= k_{41}\varepsilon_x + k_{42}\varepsilon_y + k_{43}\varepsilon_z + k_{44}\gamma_{xy} + k_{45}\gamma_{xz} + k_{46}\gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= k_{51}\varepsilon_x + k_{52}\varepsilon_y + k_{53}\varepsilon_z + k_{54}\gamma_{xy} + k_{55}\gamma_{xz} + k_{56}\gamma_{yz} \\ \tau_{yz} &= k_{61}\varepsilon_x + k_{62}\varepsilon_y + k_{63}\varepsilon_z + k_{64}\gamma_{xy} + k_{65}\gamma_{xz} + k_{66}\gamma_{yz} \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde los coeficientes k_{ij} son 36 propiedades del material. A estos coeficientes se les *llama propiedades elásticas de material* y a la matriz de 6×6 que las agrupa se le llama *matriz de rigidez*.

Las relaciones (3.8) constituyen una generalización natural de la ley de Hooke. Esta generalización fue propuesta por Cauchy aplicando el principio de superposición y se conoce como *ley de Hooke generalizada*.

[42] Biografía en http://www.stetson.edu/~efriedma/periodictable/html/P.html

Manejar esta ley de Hooke generalizada requeriría medir experimentalmente 36 propiedades elásticas para cada material, lo cual reviste, sin lugar a dudas, una dificultad metodológica de significativas proporciones.

Afortunadamente, si se adopta como hipótesis fundamental que el material es isótropo, además de suponer que es homogéneo, elástico y lineal, entonces es posible demostrar que se requieren únicamente dos propiedades elásticas para definir las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones.

La temática acerca del número de constantes elásticas requeridas dio lugar a una controversia que se extendió por varias décadas[43]. Cauchy utilizó siempre dos constantes elásticas en la formulación de su teoría tridimensional de esfuerzos para materiales isótropos. Por el contrario, Navier y Poisson, motivados en el hecho de suponer que el módulo de Poisson era constante para todos los materiales e igual a 0.25, fueron partidarios de una única constante elástica. La controversia se reinició con la formulación matemática desarrollada por George Green en 1833, la cual corroboraba, usando métodos energéticos, que se requerían dos constantes elásticas independientes. Finalmente, Franz Neumann y su pupilo Gustave Kirchhoff demostraron experimentalmente en 1859 que el módulo de Poisson dependía de la naturaleza del material, por lo que efectivamente se requerían dos constantes. Kirchhoff encontró, mediante ensayos llevados a cabo cuidadosamente, que el módulo de Poisson para el acero era 0.294, mientras que para el cobre obtuvo un valor de 0.387.

En el teorema que se presenta a continuación se demuestra de una manera inequívoca que las teorías basadas en las dos constantes elásticas estaban en lo cierto.

Teorema

Si un material es homogéneo, elástico, lineal e isótropo, entonces los esfuerzos y las deformaciones en cada punto están relacionados a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\tau_{xy} &= 2G\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= 2G\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= 2G\gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

[43] Stephen P. Timoshenko *"History of Strength of Materials"*, Dover Publications, New York, 1983, pp. 216-222.

donde λ y G son dos propiedades elásticas del material conocidas como constantes de Lamé.

Demostración:

Como el material es homogéneo, elástico y lineal, entonces las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones en cada punto del sólido es lineal, por lo que podemos partir de las Ecs. (3.8) con 36 constantes elásticas k_{ij} que no dependen de la posición.

Ahora bien, si el material es isótropo, entonces las propiedades elásticas deben ser simétricas con respecto a cualquier plano. Para considerar en primer lugar la simetría con respecto al plano xy, construimos un nuevo sistema de coordenadas $x'y'z'$ rotado 180° alrededor del eje x del sistema de coordenadas original xyz, como se muestra en la Fig. 3.4a.

En este nuevo sistema de coordenadas las matrices de esfuerzos y de deformaciones vienen dadas por

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_x & -\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ -\tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ -\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & -\gamma_{xy} & -\gamma_{xz} \\ -\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ -\gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Escribiendo las ecuaciones constitutivas (3.8) en este sistema de coordenadas y tomando en cuenta que los coeficientes k_{ij} no deben cambiar por tratarse de material isótropo, tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= k_{11}\varepsilon_x + k_{12}\varepsilon_y + k_{13}\varepsilon_z - k_{14}\gamma_{xy} - k_{15}\gamma_{xz} + k_{16}\gamma_{yz} \\
\sigma_y &= k_{21}\varepsilon_x + k_{22}\varepsilon_y + k_{23}\varepsilon_z - k_{24}\gamma_{xy} - k_{25}\gamma_{xz} + k_{26}\gamma_{yz} \\
\sigma_z &= k_{31}\varepsilon_x + k_{32}\varepsilon_y + k_{33}\varepsilon_z - k_{34}\gamma_{xy} - k_{35}\gamma_{xz} + k_{36}\gamma_{yz} \\
-\tau_{xy} &= k_{41}\varepsilon_x + k_{42}\varepsilon_y + k_{43}\varepsilon_z - k_{44}\gamma_{xy} - k_{45}\gamma_{xz} + k_{46}\gamma_{yz} \\
-\tau_{xz} &= k_{51}\varepsilon_x + k_{52}\varepsilon_y + k_{53}\varepsilon_z - k_{54}\gamma_{xy} - k_{55}\gamma_{xz} + k_{56}\gamma_{yz} \\
\tau_{yz} &= k_{61}\varepsilon_x + k_{62}\varepsilon_y + k_{63}\varepsilon_z - k_{64}\gamma_{xy} - k_{65}\gamma_{xz} + k_{66}\gamma_{yz}
\end{aligned}$$

Comparando estas ecuaciones con las Ecs. (3.8) concluimos que

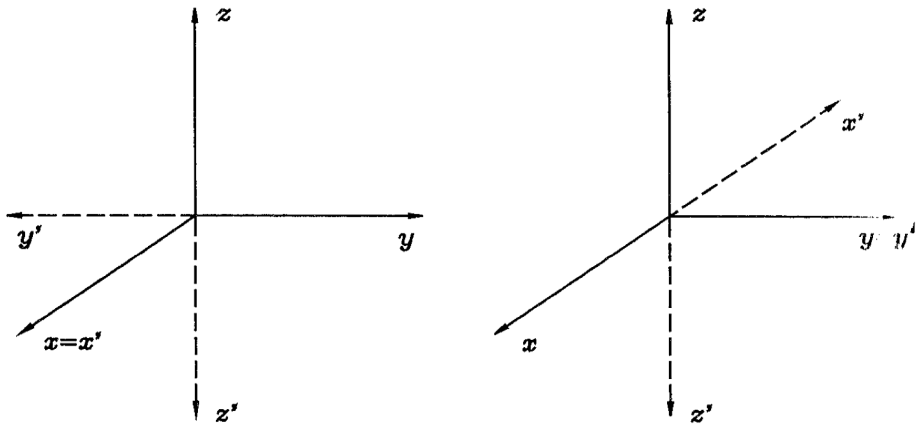


Figura 3.4 Simetría de las propiedades elásticas: a) Respecto al plano *xy*; b) Respecto al plano *xz*.

$$k_{14} = k_{15} = 0$$
$$k_{24} = k_{25} = 0$$
$$k_{34} = k_{35} = 0$$
$$k_{41} = k_{42} = k_{43} = k_{46} = 0$$
$$k_{51} = k_{52} = k_{53} = k_{56} = 0$$
$$k_{64} = k_{65} = 0$$

Luego, las ecuaciones constitutivas (3.8) toman la forma

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= k_{11}\varepsilon_x + k_{12}\varepsilon_y + k_{13}\varepsilon_z + k_{16}\gamma_{yz} \\
\sigma_y &= k_{21}\varepsilon_x + k_{22}\varepsilon_y + k_{23}\varepsilon_z + k_{26}\gamma_{yz} \\
\sigma_z &= k_{31}\varepsilon_x + k_{32}\varepsilon_y + k_{33}\varepsilon_z + k_{36}\gamma_{yz} \\
\tau_{xy} &= k_{44}\gamma_{xy} + k_{45}\gamma_{xz} \\
\tau_{xz} &= k_{54}\gamma_{xy} + k_{55}\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= k_{61}\varepsilon_x + k_{62}\varepsilon_y + k_{63}\varepsilon_z + k_{66}\gamma_{yz}
\end{aligned} \qquad (3.10)$$

Consideremos ahora la simetría de las propiedades del material respecto al plano *xz*. Para estudiar esta simetría consideramos de nuevo sistema de coordenadas *x'y'z'* rotado 180° alrededor del eje *y* del sistema coordenadas original *xyz*, como se muestra en la Fig. 3.4b. En este nu sistema de coordenadas las matrices de esfuerzos y de deformaciones vie dadas por

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_x & -\tau_{xy} & \tau_{xz} \\ -\tau_{xy} & \sigma_y & -\tau_{yz} \\ \tau_{xz} & -\tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & -\gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ -\gamma_{xy} & \varepsilon_y & -\gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & -\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Escribiendo las ecuaciones constitutivas (3.10) en este sistema coordenadas tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= k_{11}\varepsilon_x + k_{12}\varepsilon_y + k_{13}\varepsilon_z - k_{16}\gamma_{yz} \\
\sigma_y &= k_{21}\varepsilon_x + k_{22}\varepsilon_y + k_{23}\varepsilon_z - k_{26}\gamma_{yz} \\
\sigma_z &= k_{31}\varepsilon_x + k_{32}\varepsilon_y + k_{33}\varepsilon_z - k_{36}\gamma_{yz} \\
-\tau_{xy} &= -k_{44}\gamma_{xy} + k_{45}\gamma_{xz} \\
\tau_{xz} &= -k_{54}\gamma_{xy} + k_{55}\gamma_{xz} \\
-\tau_{yz} &= k_{61}\varepsilon_x + k_{62}\varepsilon_y + k_{63}\varepsilon_z - k_{66}\gamma_{yz}
\end{aligned}$$

Comparando estas ecuaciones con las Ecs. (3.10) se concluye que

$$k_{16} = k_{26} = k_{36} = 0$$
$$k_{45} = k_{54} = 0$$
$$k_{61} = k_{62} = k_{63} = 0$$

Luego las Ecs. (3.10) toman la forma

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= k_{11}\varepsilon_x + k_{12}\varepsilon_y + k_{13}\varepsilon_z \\
\sigma_y &= k_{21}\varepsilon_x + k_{22}\varepsilon_y + k_{23}\varepsilon_z \\
\sigma_z &= k_{31}\varepsilon_x + k_{32}\varepsilon_y + k_{33}\varepsilon_z \\
\tau_{xy} &= k_{44}\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= k_{55}\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= k_{66}\gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si consideramos ahora la simetría con respecto al plano yz, no obtendríamos ninguna información adicional, razón por la cual las Ecs. (3.11) permanecen idénticas.

Un material que posee propiedades elásticas simétricas con respecto a tres planos mutuamente ortogonales se dice que es *ortotrópico*. La madera, los cristales de topacio y los compuestos reforzados unidireccionalmente con fibra son ejemplos característicos. Como se desprende de la Ec. (3.11), en este caso se requieren 12 propiedades elásticas para caracterizar la relación entre los esfuerzos y las deformaciones.

Cuando el material es isotrópico, además de la simetría con relación a tres planos ortogonales, sabemos también que las propiedades elásticas son idénticas en todas las direcciones. Partiendo de esta hipótesis podemos intercambiar los ejes x, y y z en las Ecs. (3.11) sin que las propiedades del material varíen. Así, por ejemplo, si intercambiamos los ejes x y y en las Ecs. (3.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= k_{11}\varepsilon_y + k_{12}\varepsilon_x + k_{13}\varepsilon_z \\
\sigma_x &= k_{21}\varepsilon_y + k_{22}\varepsilon_x + k_{23}\varepsilon_z \\
\sigma_z &= k_{31}\varepsilon_y + k_{32}\varepsilon_x + k_{33}\varepsilon_z \\
\tau_{xy} &= k_{44}\gamma_{xy} \\
\tau_{yz} &= k_{55}\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= k_{66}\gamma_{xz}
\end{aligned}$$

Comparando estas ecuaciones con las Ecs. (3.11) concluimos que

$$k_{11} = k_{22}, \qquad k_{12} = k_{21}, \qquad k_{13} = k_{23}, \qquad k_{31} = k_{32}, \qquad k_{55} = k_{66} \tag{3.12}$$

Análogamente, si intercambiamos los ejes x y z en las Ecs. (3.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= k_{11}\varepsilon_z + k_{12}\varepsilon_y + k_{13}\varepsilon_x \\
\sigma_y &= k_{21}\varepsilon_z + k_{22}\varepsilon_y + k_{23}\varepsilon_x \\
\sigma_x &= k_{31}\varepsilon_z + k_{32}\varepsilon_y + k_{33}\varepsilon_x \\
\tau_{yz} &= k_{44}\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= k_{55}\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= k_{66}\gamma_{xy}
\end{aligned}$$

Comparando estas ecuaciones con las Ecs. (3.11) se concluye que

$$k_{11} = k_{33}, \qquad k_{12} = k_{32}, \qquad k_{13} = k_{31}, \qquad k_{21} = k_{23}, \qquad k_{44} = k_{66} \tag{3.13}$$

Ninguna relación adicional diferente se obtiene al intercambiar y y z. Entonces, haciendo uso de las relaciones (3.12) y (3.13), las Ecs. (3.11) pueden escribirse en términos de tres únicas propiedades elásticas como

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= k_{11}\varepsilon_x + k_{12}(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_y &= k_{11}\varepsilon_y + k_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \\
\sigma_z &= k_{11}\varepsilon_z + k_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\
\tau_{xy} &= k_{44}\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= k_{44}\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= k_{44}\gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Sean 1, 2 y 3 los ejes principales de la matriz de esfuerzos. En este sistema principal de coordenadas, las Ecs. (3.14) pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= k_{11}\varepsilon_1 + k_{12}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\
\sigma_2 &= k_{11}\varepsilon_2 + k_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \\
\sigma_3 &= k_{11}\varepsilon_3 + k_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\
0 &= k_{44}\gamma_{12} \\
0 &= k_{44}\gamma_{13} \\
0 &= k_{44}\gamma_{23}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Como $k_{44} \neq 0$, entonces $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ y concluimos así que, para un material isotrópico, *las direcciones principales de la matriz de esfuerzos coinciden con las direcciones principales de la matriz de deformaciones.*

Usando las Ecs. (3.15) el esfuerzo de corte máximo puede calcularse como

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{1}{2}\left[k_{11}\varepsilon_3 + k_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - k_{11}\varepsilon_1 - k_{12}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right]$$

Es decir

$$\begin{aligned}
\tau_{máx} &= \frac{1}{2}\left[k_{11}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) + k_{12}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\right] \\
&= (k_{11} - k_{12})\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2} = (k_{11} - k_{12})\gamma_{máx}
\end{aligned}$$

Ahora bien, de acuerdo con la Ec. (3.15), los esfuerzos y las deformaciones tangenciales están relacionados a través de la propiedad k_{44}. Entonces

$$\tau_{máx} = k_{44}\gamma_{máx}$$

Luego

$$k_{44} = k_{11} - k_{12}$$

Entonces las Ecs. (3.14) pueden escribirse en términos de las dos únicas propiedades elásticas k_{11} y k_{12} como

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= k_{11}\varepsilon_x + k_{12}(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_y &= k_{11}\varepsilon_y + k_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \\
\sigma_z &= k_{11}\varepsilon_z + k_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\
\tau_{xy} &= (k_{11} - k_{12})\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= (k_{11} - k_{12})\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= (k_{11} - k_{12})\gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Haciendo $k_{12} = \lambda$ y $k_{11} - k_{12} = 2G$, podemos finalmente escribir

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\tau_{xy} &= 2G\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= 2G\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= 2G\gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

al como se quería demostrar.

Las propiedades λ y G se denominan *constantes de Lamé*, en honor al ingeniero francés Gabriel Lamé (1795-1870). La constante G es también conocida como *módulo de corte*.

En relación al comportamiento de un material homogéneo, elástico, lineal e isótropo, tres conclusiones importantes pueden extraerse de las Ecs. (3.9):

a) Solo se requieren dos propiedades elásticas para establecer una relación entre la matriz de esfuerzos y la matriz de deformaciones.
b) La deformación normal que se genera en cada punto del sólido en una determinada dirección depende únicamente de los esfuerzos normales en tres direcciones ortogonales.
c) La deformación tangencial entre dos direcciones ortogonales depende exclusivamente de los esfuerzos tangenciales en los planos perpendiculares a ambas direcciones.

Figura 3.5 Gabriel Lamé[44] (1795-1870)

Las Ecs. (3.9) pueden ser resueltas para las expresar las deformaciones en términos de los esfuerzos, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{2G}\left[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda+2G}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{2G}\left[\sigma_y - \frac{\lambda}{3\lambda+2G}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{2G}\left[\sigma_z - \frac{\lambda}{3\lambda+2G}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\right] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{2G} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

[44] Biografía en http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lame.html

Las constantes de Lamé, aún cuando resultan convenientes en la formulación matemática de algunos problemas, no poseen un significado físico de fácil interpretación que conduzca a un método simple para su medición experimental directa. En su lugar, las ecuaciones constitutivas suelen expresarse en términos de otras propiedades elásticas que pueden ser determinadas en un ensayo de tracción simple. A tales efectos consideremos una barra sometida a una carga axial de manera que en cada uno de sus puntos se genera únicamente el esfuerzo normal σ_x. Aplicando entonces la primera de las Ecs. (3.17) tenemos

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda+2G}\sigma_x\right] = \frac{\lambda+G}{G(3\lambda+2G)}\sigma_x$$

Esto es

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G} \tag{3.18}$$

Como se dijo antes, el cociente entre el esfuerzo axial σ_x aplicado a una barra y la deformación unitaria longitudinal ε_x que ésta experimenta se denomina módulo de elasticidad o de Young E.

Entonces

$$E = \frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G} \tag{3.19}$$

Como veremos dentro de poco, este módulo de elasticidad puede medirse de una manera muy simple en un ensayo de tracción.

Usando ahora la segunda de las Ecs. (3.17), podemos evaluar las deformaciones transversales de la barra. En efecto

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2G}\left[0 - \frac{\lambda}{3\lambda+2G}\sigma_x\right] = -\frac{\lambda}{2G(3\lambda+2G)}\sigma_x \tag{3.20}$$

Expresando σ_x en función de ε_x mediante la Ec. (3.18) y sustituyendo en la Ec. (3.20) tenemos

$$\varepsilon_y = -\frac{\lambda}{2G(3\lambda+2G)}\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}\varepsilon_x = -\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}\varepsilon_x$$

Esto es

$$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \tag{3.21}$$

A la relación, en valor absoluto, entre la deformación transversal y la deformación axial se le llama, como ya se dijo antes, módulo de Poisson ν. Entonces

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \tag{3.22}$$

Esta propiedad también puede ser medida de una manera relativamente simple en un ensayo de tracción.

En la Tabla 3.1 se muestran valores típicos de los módulos de elasticidad y de Poisson para varios materiales.

Tabla 3.1 Propiedades elásticas de algunos materiales[45]

Material	Módulo de Elasticidad		Módulo de Poisson
	(GPa)	(psi)	
Acero al carbono	205	29×10^6	0.30
Aleación de aluminio	70	10×10^6	0.33
Fundición gris, Clase 20	75	11×10^6	0.22
Bronce	110	16×10^6	0.34
Aleación de Magnesio	45	6.5×10^6	0.35
Aleación de Titanio	110	16×10^6	0.33
Concreto	30	4.5×10^6	0.15
Madera	12	1.7×10^6	0.34

Las Ecs. (3.19) y (3.22) pueden resolverse para expresar las constantes de Lamé λ y G en términos de las propiedades elásticas E y ν. De esta manera obtenemos

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{3.23}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.24}$$

[45] Los valores indicados son representativos a temperatura ambiente. Los valores exactos dependen de la composición y del proceso de manufactura.

Sustituyendo estas expresiones en las Ecs. (3.17) obtenemos, después de algunas manipulaciones algebraicas, las ecuaciones constitutivas en términos de las propiedades elásticas E y ν del material:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\
\varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\
\varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\
\gamma_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{xz} \\
\gamma_{yz} &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{yz}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Estas ecuaciones se conocen como ley de Hooke para materiales elásticos, lineales e isótropos.

Resolviendo ahora las Ecs. (3.25) para los esfuerzos en términos de las deformaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \\
\sigma_y &= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

En el caso de un estado plano de esfuerzos, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Luego, aplicando las Ecs. (3.25) tenemos

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}\end{aligned} \tag{3.27}$$

Obsérvese que, aún cuando el esfuerzo normal en la dirección z es nulo, la deformación normal en esa misma dirección es distinta de cero.

Utilizando las Ecs. (3.27) para expresar los esfuerzos en función de las deformaciones en el caso de un estado plano de esfuerzos, tendríamos

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{xy}\end{aligned} \tag{3.28}$$

Por otra parte, en el caso de un estado plano de deformaciones $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Luego, aplicando las Ecs. (3.26) tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)\right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\right] \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{xy}\end{aligned} \tag{3.29}$$

Nótese que para que ε_z sea cero, en el caso de un estado plano de deformaciones se genera un esfuerzo normal σ_z cuyo valor depende de las propiedades elásticas del material y de las deformaciones que se producen en las direcciones x y y, tal como se desprende de la tercera de las Ecs. (3.29).

Utilizando ahora estas ecuaciones para expresar las deformaciones en términos de los esfuerzos en el caso de un estado plano de deformación tendríamos

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}\end{aligned}$$

En síntesis, los estados planos de esfuerzos y de deformaciones pueden manejarse mediante las ecuaciones constitutivas

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= f_{11}\sigma_x + f_{12}\sigma_y \\ \varepsilon_y &= f_{21}\sigma_x + f_{22}\sigma_y \\ \varepsilon_z &= f_{31}\sigma_x + f_{32}\sigma_y \\ \gamma_{xy} &= f_{44}\tau_{xy}\end{aligned}$$

donde, en el caso de un estado plano de esfuerzos,

$$\begin{aligned}f_{11} &= f_{22} = \frac{1}{E} \\ f_{12} &= f_{21} = f_{31} = f_{32} = -\frac{\nu}{E} \\ f_{44} &= \frac{1+\nu}{E}\end{aligned}$$

mientras que para un estado plano de deformaciones

$$\begin{aligned}f_{11} &= f_{22} = \frac{1-\nu^2}{E} \\ f_{12} &= f_{21} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \\ f_{31} &= f_{32} = 0 \\ f_{44} &= \frac{1+\nu}{E}\end{aligned}$$

Las Ecs. (3.31) pueden también escribirse como

$$\begin{aligned}\sigma_x &= k_{11}\varepsilon_x + k_{12}\varepsilon_y \\ \sigma_y &= k_{21}\varepsilon_x + k_{22}\varepsilon_y \\ \sigma_z &= k_{31}\varepsilon_x + k_{32}\varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= k_{44}\gamma_{xy}\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde, en el caso de un estado plano de esfuerzos,

$$\begin{aligned}k_{11} &= k_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \\ k_{12} &= k_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ k_{31} &= k_{32} = 0 \\ k_{44} &= \frac{E}{1+\nu}\end{aligned} \tag{3.35}$$

mientras que para un estado plano de deformaciones

$$\begin{aligned}k_{11} &= k_{22} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ k_{12} &= k_{21} = k_{31} = k_{32} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ k_{44} &= \frac{E}{1+\nu}\end{aligned} \tag{3.36}$$

Ejemplo 3.1

En un punto de una pieza de acero donde existe un estado plano de esfuerzos se conocen las siguientes componentes de la matriz de deformaciones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 5\times10^{-4} \\ \varepsilon_y &= 2\times10^{-4} \\ \gamma_{xy} &= -2\times10^{-4}\end{aligned}$$

Determine la deformación normal en la dirección del eje z y calcule la deformación tangencial máxima.

Solución: Utilizando las ecuaciones constitutivas (3.27) para el caso de un estado plano de esfuerzos, tenemos

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{a}$$

Ahora bien, utilizando las relaciones inversas (3.28) tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\end{aligned} \tag{b}$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (a), tenemos

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\left[\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\right] \\ &= -\frac{\nu}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_x(1+\nu) + \varepsilon_y(1+\nu)\right] \\ &= -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\end{aligned}$$

Simplificando se obtiene

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \tag{3.37}$$

Sustituyendo los valores numéricos de ε_x, ε_y y $\nu = 0.30$ para el acero, tenemos

$$\varepsilon_z = -\frac{0.30}{1-0.30}(5\times10^{-4} + 2\times10^{-4}) = -3\times10^{-4}$$

En la Fig. 3.6 se ha trazado el diagrama de Mohr para este estado de deformaciones. En el se observa que la deformación tangencial máxima absoluta es $\gamma_{max} = 4.5\times10^{-4}$. Nótese en este diagrama que la deformación

tangencial máxima en el plano xy es, evidentemente, inferior a la máxima absoluta.

Para determinar la deformación tangencial máxima en forma analítica debemos primero calcular las deformaciones principales. Entonces, usando la Ec. (2.48) tenemos

$$\varepsilon^*_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma^2_{xy}}$$

$$= 3.5\times10^{-4} \pm 2.5\times10^{-4}$$

Esto significa que $\varepsilon_1 = \varepsilon_z = -3\times10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 1\times10^{-4}$, $\varepsilon_3 = 6\times10^{-4}$. Luego

$$\gamma_{máx} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2} = 4.5\times10^{-4}$$

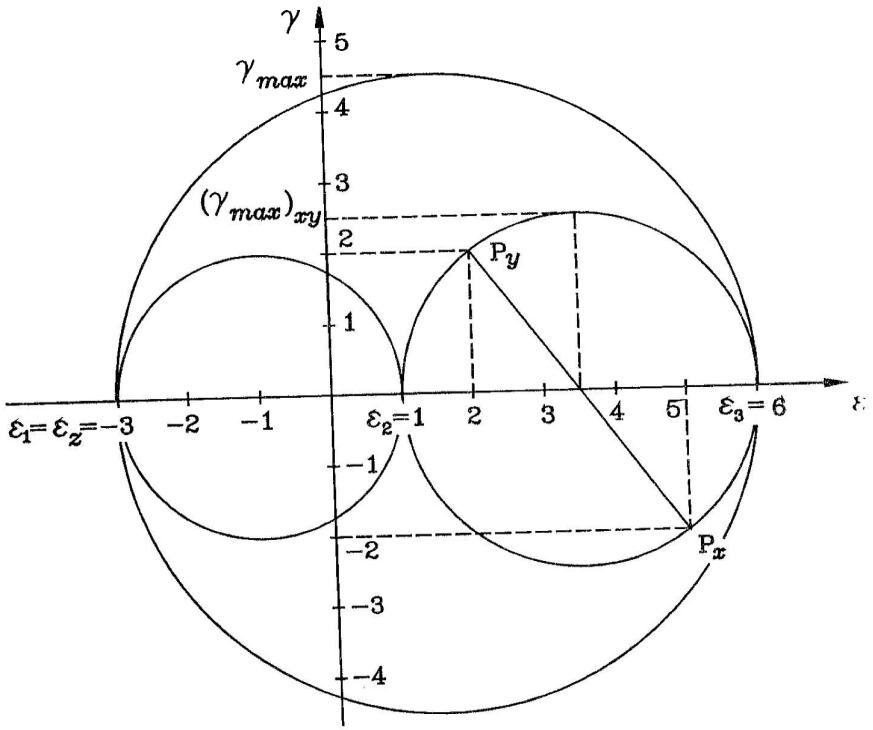


Figura 3.6 Diagrama de Mohr para el ejemplo 3.1

Ejemplo 3.2

En la Fig. 3.7 se muestra un elemento infinitesimal perteneciente a un sólido en el cual existe un estado uniaxial de esfuerzos.

El valor del esfuerzo σ_x se desconoce, pero la deformación normal ε_x se ha medido experimentalmente.

Determine la variación de volumen del elemento en función de ε_x, de su volumen inicial y de las propiedades elásticas del material E y ν.

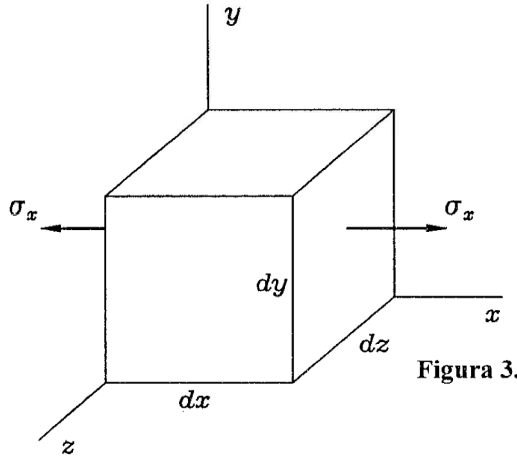


Figura 3.7 Elemento de volumen sometido a un estado uniaxial de esfuerzos

Solución: El volumen inicial del elemento es $dV = dx\,dy\,dz$, mientras que su volumen final será

$$dV' = (dx + du)(dy + dv)(dz + dw)$$

$$= (dx + \varepsilon_x dx)(dy + \varepsilon_y dy)(dz + \varepsilon_z dz)$$

$$= dxdydz(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$$

$$= dV(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$$

donde du, dv y dw son los cambios de longitud en las direcciones dx, dy y dz respectivamente.

Entonces la variación de volumen será

$$dV' - dV = dV\left[(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1\right]$$

Aplicando las ecuaciones constitutivas (3.25) tenemos que

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \tag{a}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x \tag{b}$$

Sustituyendo (a) en (b) se obtiene

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \tag{c}$$

Luego

$$dV' - dV = dV\left[(1+\varepsilon_x)(1-\nu\varepsilon_x)^2 - 1\right]$$
$$= dV(1 - 2\nu\varepsilon_x + \nu^2\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x - 2\nu\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x^3 - 1)$$

Suponiendo que las deformaciones son mucho menores que la unidad, las potencias de ε_x pueden despreciarse para obtener

$$dV' - dV = \varepsilon_x(1-2\nu)dV \tag{3.38}$$

Esta variación puede también obtenerse directamente utilizando el concepto de dilatación volumétrica estudiado en el Cap. 2. En efecto, de las Ecs. (2.36) y (2.37) tenemos que

$$dV' - dV = \kappa dV = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dV$$

donde κ es la dilatación volumétrica. Sustituyendo en esta expresión las deformaciones ε_y y ε_z dadas por la Ec. (a), se obtiene

$$dV' - dV = (\varepsilon_x - \nu\varepsilon_x - \nu\varepsilon_x)dV = \varepsilon_x(1-2\nu)dV$$

Ejemplo 3.3

Consideremos el estado triaxial de esfuerzos que se genera en un elemento en el cual existe un esfuerzo de compresión σ_x mientras se restringe totalmente la dilatación lateral en las direcciones y y z. Suponiendo que las propiedades elásticas del material son E y ν, determinar:

a) Los esfuerzos que se generan en las direcciones y y z
b) La deformación normal en la dirección x.

Solución: a) Como las dilataciones están totalmente restringidas en las direcciones y y z, en estas direcciones se generan sendos esfuerzos normales de

compresión σ_y y σ_z. Aplicando entonces las ecuaciones constitutivas (3.2 tenemos

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \tag{a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = 0 \tag{b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \tag{c}$$

Las Ecs.(b) y (c) pueden resolverse para los esfuerzos σ_y y σ_z en términ de σ_x para obtener

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x$$

b) Sustituyendo esta expresión en la Ec. (a) tenemos

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\left(\frac{2\nu}{1-\nu}\right)\sigma_x$$

De donde

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)E}\sigma_x$$

3.3 El ensayo de tracción

Son diversos los ensayos de laboratorio que se han ideado con el objeto d obtener una información básica sobre las propiedades mecánicas de lo materiales. Las pruebas de tracción, de compresión y de dureza ocupan un luga preponderante, no solo como instrumentos para especificar las propiedade mecánicas, sino también como medios de verificación de dichas propiedades e el proceso de recepción de materiales. Los ensayos de flexión, torsión, impact y fatiga son también empleados en algunas circunstancias específicas.

El ensayo de tracción es una de las pruebas más primitivas y se emple ampliamente para determinar las propiedades elásticas y las característica

básicas de resistencia mecánica de los materiales. A juzgar por las anotaciones y esquemas encontrados en sus cuadernos de notas, se cree que Leonardo da Vinci fue el primero en idear una máquina para determinar la resistencia mecánica de cables de hierro mediante ensayos de tracción[46].

El ensayo de tracción, tal como se realiza hoy en día, se viene utilizando desde finales del siglo XIX para determinar la resistencia mecánica de los materiales, aunque ahora los equipos utilizados para realizarlos son relativamente sofisticados desde el punto de vista de su accionamiento, instrumentación y control. Como elemento de prueba se utiliza una probeta estándar como la mostrada en la Fig. 3.8, la cual se fabrica a partir de una muestra del material cuyas propiedades se desea determinar. Se pueden utilizar también probetas de menor tamaño[47] con dimensiones proporcionales a la mostrada en la Fig. 3.8.

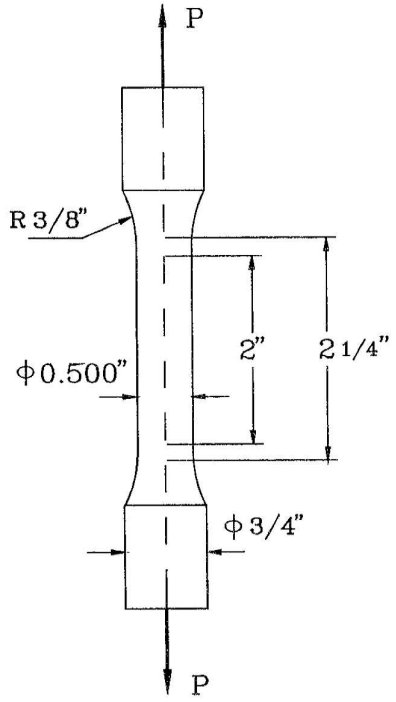


Figura 3.8 Probeta estándar de sección transversal circular

[46] Stephen P. Timoshenko *"History of Strength of Materials"*, Dover Publications, New York, 1983, pp. 2-6.

[47] Ver el *"1992 Annual Book of ASTM Standards"*, Section 3, Vol. 01.01, Philadelphia, Pennsylvania

En general estas probetas son de sección transversal circular, pero en algunos casos también se fabrican de sección rectangular, como es el caso de las probetas extraídas de láminas delgadas, e incluso de sección curva cuando se fabrican a partir de las paredes de tubos o recipiente cilíndricos.

Como se observa en la Fig. 3.8, la probeta está formada por una parte central de 0.500±0.010" de diámetro y 2¼" de longitud. La llamada *distancia entre puntos*, la cual corresponde a la longitud que se utiliza para medir las deformaciones, es de 2.000±0.005". La sección transversal de la probeta se incrementa en sus extremos hasta un diámetro de 3/4" con el propósito fundamental de que durante el ensayo la fractura se produzca en la zona central de prueba y no en los extremos por donde se sujeta la probeta y se aplican las cargas axiales de tracción. La transición de la zona central a los extremos se realiza de manera suave mediante radios de empalme de 3/8" con la finalidad de disminuir al máximo la concentración de esfuerzos. Si se utiliza el Sistema Internacional, entonces el diámetro de la probeta debe ser de 12.5±0.2mm, la longitud de la zona con diámetro reducido de 75 mm, la distancia entre puntos de 62.5±0.1mm y el radio de empalme de 10 mm.

La probeta se monta entonces en una máquina de ensayos para someterla a una carga axial de tracción *P*. En la Fig. 3.9 se muestra una máquina universal de ensayos típica.

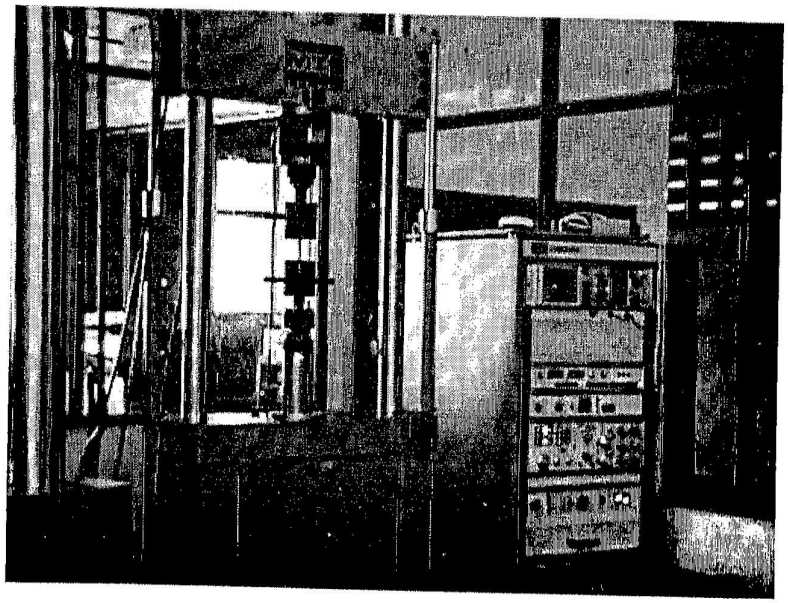


Figura 3.9 Máquina universal de ensayos marca MTS (Cortesía del Laboratorio de Materiales de la Universidad Simón Bolívar)

La probeta se fija en uno de sus extremos a la mordaza superior de la máquina de ensayos, la cual está fija, mientras que su otro extremo se amarra a la mordaza inferior, la cual es accionada por un pistón hidráulico. Con el fin de someter la probeta al ensayo de tracción, la velocidad de deformación se fija en un valor muy pequeño y constante con el fin de simular una carga estática. La máquina entonces va aplicando la carga axial necesaria para que el pistón se desplace verticalmente hacia abajo a la velocidad previamente especificada.

Con los valores de los desplazamientos (elongaciones) y de las cargas aplicadas que se extraen del ensayo, se construye un gráfico de P versus Δl. En la Fig. 3.10 se muestra un diagrama típico para un material dúctil.

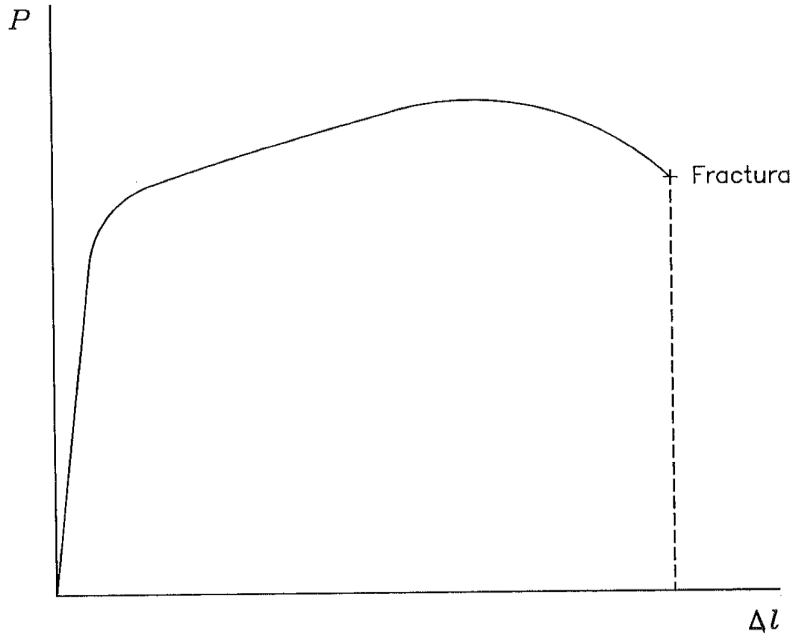


Figura 3.10 Diagrama de carga axial versus elongación de la probeta en un ensayo de tracción

Puede demostrarse que si la línea de acción de la carga P pasa por el centroide de cada sección transversal de la probeta, los esfuerzos en cualquier sección transversal son normales, se distribuyen uniformemente y vienen dados por $\sigma = P/A_0$, donde A_0 es el área inicial de la sección transversal de la probeta. Entonces, si en lugar de graficar cargas versus desplazamientos se llevan a un diagrama los esfuerzos $\sigma = P/A_0$ y las deformaciones axiales $\varepsilon = \Delta l / l_0$, obtenemos el llamado *diagrama esfuerzo-deformación*, Fig. 3.11.

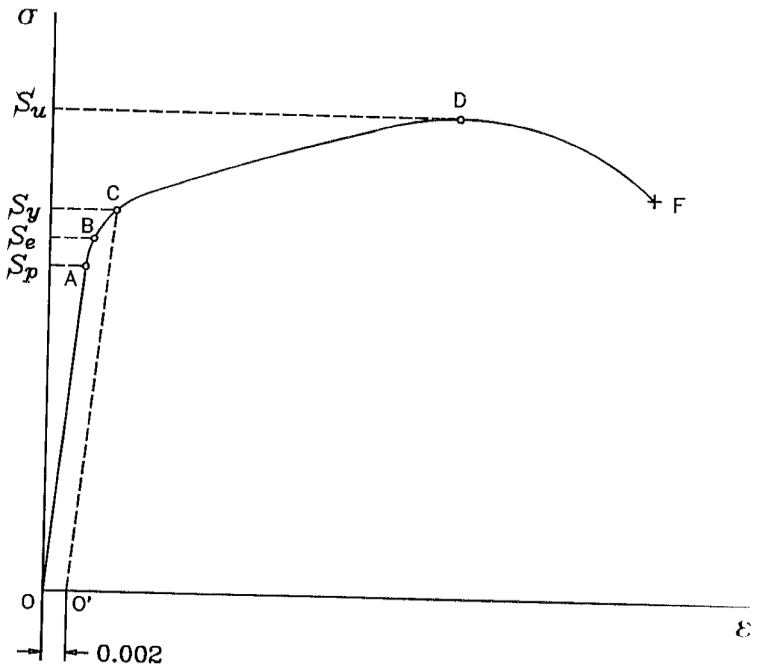


Figura 3.11 Diagrama esfuerzo-deformación para un material dúctil típico

En lo que sigue se analizarán las diversas propiedades mecánicas q pueden extraerse de este diagrama.

El módulo de elasticidad

La porción rectilínea OA de este diagrama corresponde a la región elásti donde se cumple la ley de Hooke. En el caso uniaxial, haciendo coincidir el e x con el eje de la probeta, podríamos resumir la ley de Hooke en la siguien expresión

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

Esta es la ecuación de una recta en el plano $\{\varepsilon_x, \sigma_x\}$ que pasa por orige con pendiente E. Luego el módulo de elasticidad E puede obtener experimentalmente midiendo la pendiente de esta recta (la recta OA) en diagrama esfuerzo deformación.

El módulo de elasticidad nos da una noción acerca de la *rigidez* relativa d un material en la zona elástica lineal. Así, mientras mayor sea el módul

elasticidad E, mayor será el esfuerzo necesario para producir una misma deformación. Visto de otra manera, mientras mayor sea E, menor será la deformación que experimenta el material para un mismo nivel de esfuerzos. En la Fig. 3.12 se muestran superpuestos los diagramas esfuerzo-deformación para dos materiales A y B con módulos de elasticidad diferentes. Dado que $E_A > E_B$, podemos decir que el material A es más rígido que el material B. En efecto, de la Fig. 3.12a observamos que para producir una deformación predeterminada idéntica en ambos materiales $\varepsilon_A = \varepsilon_B$, se tiene que aplicar al material A un esfuerzo $\sigma_A > \sigma_B$. De igual manera, en la Fig. 3.12b se observa que si se aplican esfuerzos idénticos $\sigma_A = \sigma_B$ a ambos materiales, el material A experimenta una deformación $\varepsilon_A < \varepsilon_B$.

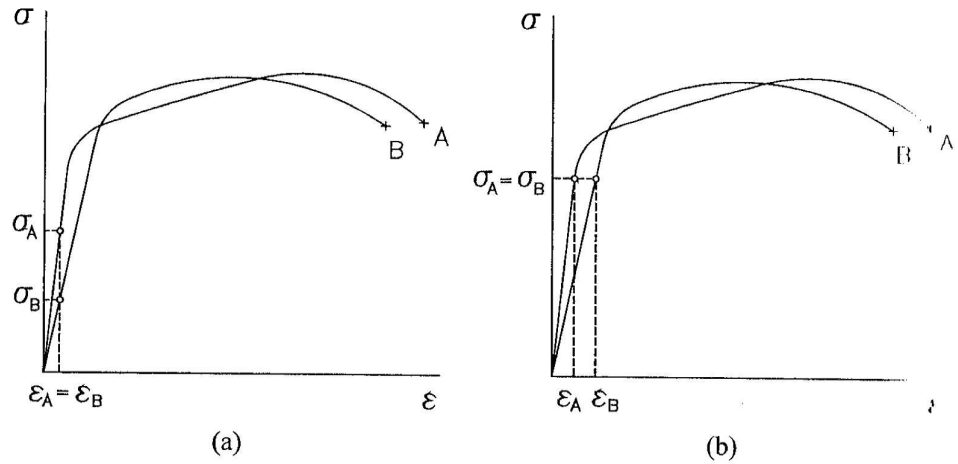


Figura 3.12 Esfuerzos y deformaciones para dos materiales con diferentes módulos de elasticidad: a) Esfuerzos necesarios para producir una misma deformación, b) Deformaciones generadas para un mismo nivel de esfuerzos.

Examinando brevemente la Tabla 3.1, en la cual se muestran los valores del módulo de elasticidad para algunos materiales, podemos concluir, a modo de ejemplo, que un acero al carbono es aproximadamente tres veces más rígido que una aleación de aluminio. Por último, cabe decir que en el modelo de cuerpo rígido adoptado en los cursos de Mecánica Analítica, el diagrama esfuerzo-deformación degenera en una recta vertical coincidente con el eje de las ordenadas, lo cual significa que, independientemente del nivel que tengan los esfuerzos, no se producen deformaciones.

El módulo de Poisson

El módulo de Poisson también puede ser determinado durante el ensayo de tracción mediante la medición de la variación del diámetro de la probeta durante la prueba. En efecto, haciendo coincidir el eje de la probeta con el eje x y orientando los ejes y y z en dirección radial, tenemos, aplicando las ecuaciones constitutivas (3.25), que la deformación axial de la probeta será $\varepsilon_x = \sigma_x/E$, mientras que las deformaciones en la dirección radial serán $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\sigma_x/E$. Combinando estas dos expresiones tendríamos que $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$, razón por la cual el módulo de Poisson puede interpretarse físicamente como la relación, en valores absolutos, entre la deformación transversal y la deformación axial cuando un elemento se somete a un estado de esfuerzo monoaxial. Así pues,

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{\textit{deformación transversal}}{\textit{deformación axial}} \right| \tag{3.39}$$

y nos proporcionaría una noción acerca de la tendencia del material a conservar su volumen. Mientras mayor sea el módulo de Poisson, mayor será dicha tendencia.

Experimentalmente se ha encontrado que ν varía para diferentes materiales dentro de un rango relativamente estrecho. Como se puede observar en la Tabla 3.1, su valor generalmente se encuentra entre 0.20 y 0.35. Valores extremos se han encontrado de 0.10 para el concreto y 0.50 para algunos plásticos. Teóricamente puede demostrarse que el módulo de Poisson no puede ser superior a 0.50. A tales efectos consideremos un paralelepípedo sometido a esfuerzos de compresión sobre sus seis caras. El estado de esfuerzos en cada punto viene definido entonces por

$$\sigma = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

donde $p < 0$. Aplicando las Ecs. (3.25) tenemos que

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{p}{E}(1 - 2\nu)$$

Utilizando los resultados del Cap. 2, tenemos que la dilatación volumétrica viene dada por

$$\kappa = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Luego

$$\kappa = \frac{3(1-2\nu)}{E} p$$

Considerando el caso $\nu = 0.50$, tendríamos que $\kappa = 0$, situación límite factible correspondiente a un cambio de volumen nulo como consecuencia de la anulación de una compresión directa con la suma de las expansiones laterales. Si suponemos que $\nu > 0.50$, entonces $\kappa > 0$, lo cual, evidentemente, resulta absurdo, pues no es posible que el paralelepípedo experimente un aumento de volumen estando comprimido en todas las direcciones. En conclusión, siempre se cumple que $\nu \leq 0.50$.

El límite proporcional

Los componentes mecánicos y estructurales generalmente se diseñan de manera que sus deformaciones sean muy pequeñas. Esto es particularmente cierto en el caso de los ejes de máquinas y otros equipos con el fin de evitar desalineaciones y, en consecuencia, el desgaste prematuro de engranajes y otros componentes. Resulta entonces conveniente, e incluso necesario, limitar los valores de los esfuerzos de manera tal que las deformaciones se mantengan dentro de ciertos límites.

Con referencia al diagrama esfuerzo-deformación de la Fig. 3.11, un nivel de esfuerzos máximo apropiado podría ser el representado por el punto A, punto a partir del cual la relación entre los esfuerzos y las deformaciones deja de ser lineal. El valor del esfuerzo correspondiente a este punto en el diagrama esfuerzo-deformación se conoce como *límite proporcional* S_p y se define como el máximo esfuerzo que se le puede aplicar a la probeta sin que se pierda la proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones. Si los esfuerzos se mantienen por debajo de este valor, se tendrían tres ventajas nada despreciables: las deformaciones resultantes serían pequeñas y elásticas y las ecuaciones constitutivas presentadas anteriormente podrían ser utilizadas sin violar ninguna de las hipótesis bajo las cuales fueron deducidas. Para medir el límite proporcional bastaría con trazar una recta superpuesta a la recta OA y determinar el punto en el cual se produce la bifurcación con la curva esfuerzo-deformación. Sin embargo, el límite proporcional es una propiedad cuya determinación está sujeta a grandes niveles de incertidumbre debido a que la localización del punto de bifurcación depende de la ampliación con que se mire y de la escala que se utilice para representar las deformaciones.

El límite elástico

Para salvar este inconveniente se podría pensar alternativamente en u como límite para los esfuerzos el punto B del diagrama esfuerzo-deformaci de la Fig. 3.11, el cual se denomina *límite elástico* S_e y se define como máximo esfuerzo que puede soportar el material sin experimen deformaciones permanentes. Las ventajas que se tendrían al usar este valor s también inmediatas: las deformaciones serían elásticas y pequeñas, mientr que las desviaciones de la ley de Hooke serían apenas perceptibles. S embargo, la determinación experimental de esta propiedad reviste dificultad metodológicas significativas puesto que se tendría reiteradamente que cargar descargar la probeta durante el ensayo de tracción para determinar en q momento su longitud original no se recupera por completo.

El límite de fluencia

En vista de los inconvenientes descritos, para los materiales c comportamiento dúctil se ha convenido en utilizar el denominado límit elástico convencional o *límite de fluencia* S_y, definido como el máxim esfuerzo que se puede aplicar sin que se produzca más que una deformació plástica muy pequeña previamente especificada. Es de uso casi universa definir este límite de fluencia como el esfuerzo que produce una deformació plástica permanente de 0.002, que equivale a un 0.2 % de la distancia origina entre puntos. Esto significa que si una probeta se carga hasta el esfuerzo d fluencia (punto C en el diagrama de la Fig. 3.11) y luego se descarga, la misma recupera parcialmente sus dimensiones originales, quedando una deformación permanente de 0.002. La determinación experimental del límite de fluencia e muy simple y no está sujeta a las imprecisiones descritas para el límite proporcional ni a los inconvenientes metodológicos que se presentan con e límite elástico. Para determinarlo basta con trazar una recta $O'C$ que pase por el punto $O'(0.002, 0)$ y sea paralela a la recta OA. La intersección de la recta $O'C$ con la curva esfuerzo-deformación es el límite de fluencia del material. En la Tabla 3.2 se muestran los valores del límite de fluencia para algunos metales.

En algunos metales, tal como es el caso del acero estructural de bajo contenido de carbono, se observa un fenómeno de fluencia bien definido, caracterizado, primero, por una pequeña –pero brusca– disminución de la carga necesaria para que aumente la deformación y, después, por una incremento importante en la deformación axial de la probeta sin que la carga axial aplicada varíe apreciablemente. En la Fig. 3.13 se muestra un ejemplo de este comportamiento. En este diagrama se observa que el esfuerzo alcanza un valor máximo de fluencia S_{yu} antes de comenzar a decrecer y un esfuerzo mínimo de fluencia S_{yl} antes de que el material comience a endurecerse por deformación.

Tabla 3.2 Propiedades mecánicas de algunos metales[48]

Material	Límite de fluencia		Resistencia a la tracción	
	(MPa)	(ksi)	(MPa)	(ksi)
Acero estructural A36	250	36	400	58
Acero estructural A283 Gr. A	160	24	310	45
Acero aleado A645	450	65	650	95
Acero aleado A353	520	75	690	100
Acero Inoxidable A240 Gr. 316	210	30	520	75
Acero Inoxidable A167 Gr. 305	170	25	480	70
Fundición gris A-47	230	33	340	50
Aleación de aluminio B209 Gr.5454	80	12	210	31
Aleación de aluminio B209 Gr.6061	240	35	290	42
Aleación de titanio B337 Gr. 3	380	55	450	65
Aleación de níquel B446 Gr.6625	340	50	760	110
Aleación de cobre B171 Gr.70600	100	15	270	40
Aleación de magnesio	270	40	380	55

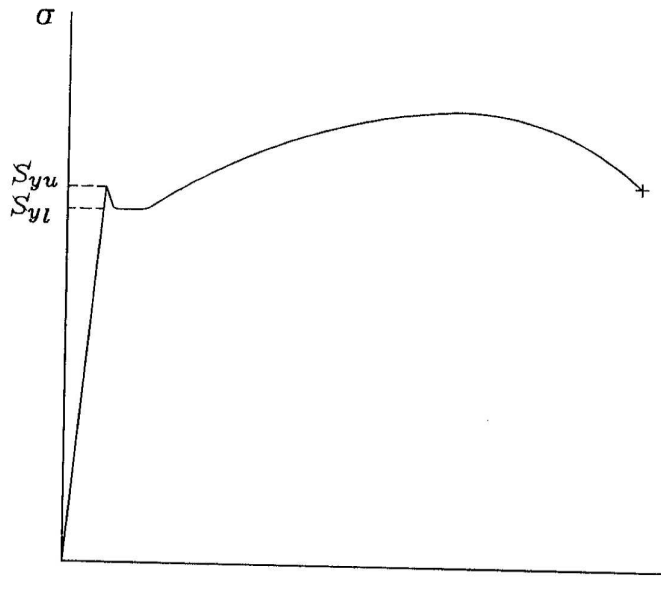


Figura 3.13 Diagrama esfuerzo-deformación para un acero estructural

[48] La designaciones de los materiales que se listan en esta tabla corresponden a las especificaciones de la *American Society for Testing and Materials* (ASTM).

Se ha comprobado experimentalmente que el límite de fluencia co
nal S_y definido para una deformación permanente de 0.2% coincide de
aproximada con el límite de fluencia mínimo en la mayoría de los casos

La resistencia a la tracción

La *resistencia a la tracción* S_u se define como el máximo esfue
puede soportar la probeta, el cual corresponde al punto D en la Fig. 3.1
Tabla 3.2 se muestran los valores de la resistencia a la tracción para
materiales.

La resistencia a la fractura

Se dice que un material es *dúctil* si presenta una deformación
apreciable antes de producirse la fractura. En caso contrario se dice
material es *frágil*. En la Fig. 3.14 se muestran los diagramas e
deformación característicos de un material con comportamiento dúctil y
naturaleza frágil.

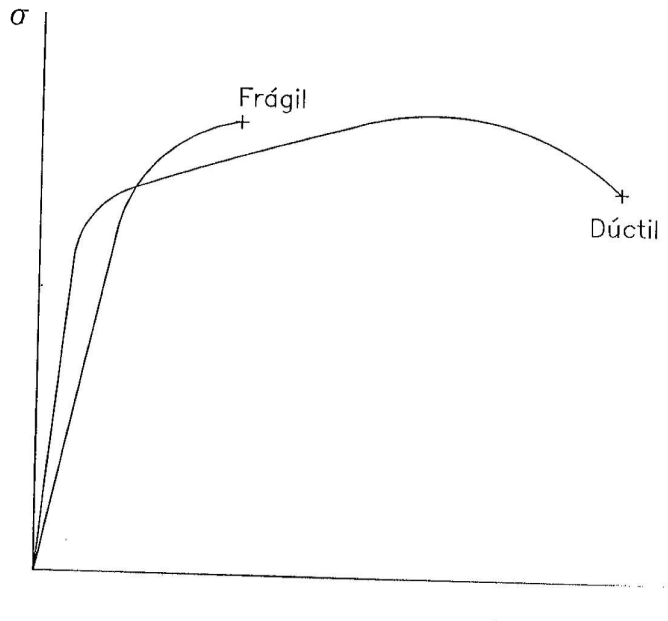


Figura 3.14 Comportamientos dúctil y frágil

Cuando el material es dúctil, el diámetro de la probeta comienza a disminuir en una zona localizada en la parte central de la probeta a partir de un determinado valor de la carga de tracción aplicada, formándose una especie de cuello, como se observa en la Fig. 3.15. Por esta razón, a partir del momento en el cual se inicia la formación del cuello, la carga necesaria para continuar la deformación hasta producirse la fractura comienza a disminuir. Dado que el esfuerzo se define en base al área original A_o, el mismo también disminuye desde el esfuerzo máximo S_u (punto D en la Fig. 3.11), que corresponde al instante en el cual se inicia la formación del cuello, hasta un valor mínimo correspondiente al momento en el cual se produce la fractura (punto F en la Fig. 3.11).

Se define entonces la *resistencia a la fractura* S_f como el esfuerzo que se alcanza en el ensayo de tracción para el momento en el cual se produce la fractura, el cual corresponde al punto F en la Fig. 3.11.

Esta resistencia a la fractura no tiene mayor importancia en el cálculo de la resistencia mecánica de un sólido y no debe jamás confundirse con la resistencia a la tracción. Solo en el caso de los materiales frágiles la resistencia a la tracción S_u coincide con la resistencia a la fractura S_f, pero para los materiales con comportamiento dúctil $S_f \leq S_u$ (ver Fig. 3.15).

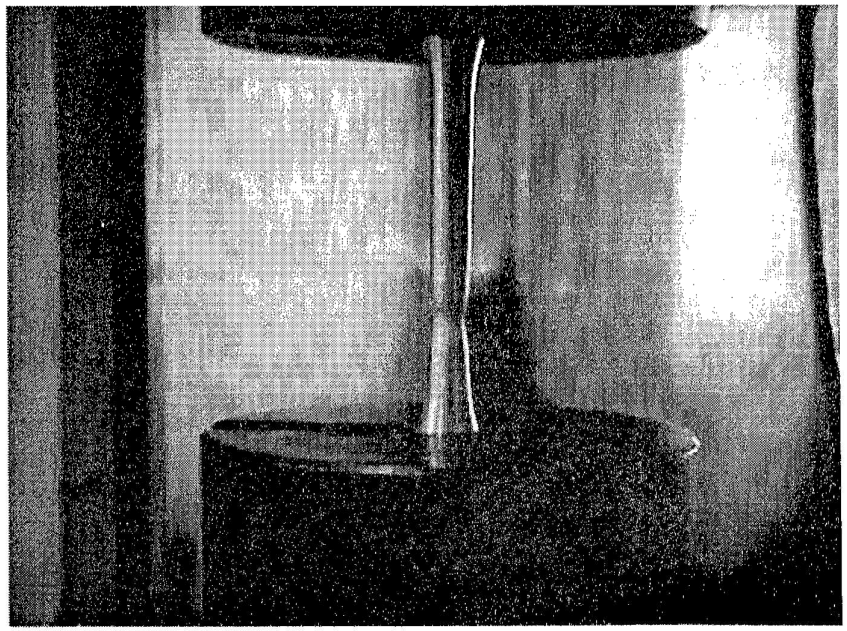


Figura 3.15 Formación del cuello en una probeta de aluminio (Cortesía del Laboratorio de Materiales de la Universidad Simón Bolívar)

En el caso de los metales dúctiles, la resistencia a la tracción S_u y el límite de fluencia S_y constituyen, en conjunto, dos especificaciones claves para el control de calidad en la recepción de materiales debido a que ambas propiedades son esenciales en el diseño de componentes mecánicos y estructurales. Sin embargo, para los materiales frágiles, la resistencia a la tracción es la propiedad fundamental que se utiliza como criterio de falla.

El porcentaje de elongación

Como se dijo antes, un material *dúctil* es aquél que experimenta una deformación plástica apreciable antes de producirse la fractura. La ductilidad se ha considerado siempre como una característica deseable en el diseño de componentes mecánicos y estructurales debido, por una parte, a que el material, al deformarse de manera apreciable antes de la fractura, envía una señal anticipada de una falla que eventualmente podría producirse. Por el contrario, los materiales con comportamiento frágil fallan de manera repentina sin dar ninguna señal previa.

La ductilidad de un material, por otra parte, está también relacionada con su capacidad de absorber energía bajo cargas dinámicas, lo cual hace de ella una cualidad imprescindible en aquellos componentes mecánicos que estarán sometidos a cargas de impacto o las estructuras ubicadas en zonas sísmicas.

Por todas estas razones se han propuesto diversas maneras de cuantificar la ductilidad de un material. La deformación ε_f correspondiente a la resistencia a la fractura S_f puede considerarse como una de esta medidas. Esta deformación viene dada por

$$\varepsilon_f = \frac{l_f - l_o}{l_o} \tag{3.40}$$

donde l_f es la distancia entre puntos final de la probeta en el momento en el cual se produce la fractura y l_o es la distancia entre puntos inicial.

El *porcentaje de elongación* es otra medida de la ductilidad de un material y se define como

$$\%\ \text{elongación} = \frac{l_f - l_o}{l_o} \times 100 = 100\varepsilon_f \tag{3.41}$$

El porcentaje de reducción de área

Una medida de la ductilidad muy utilizada también es el denominado

$$\%\ \text{reducción de área} = \frac{A_o - A_f}{A_o} \times 100 \qquad (3.4')$$

donde A_f es el área final de la sección transversal de la probeta en el momento en el cual se produce la fractura y A_o es el área inicial.

Ejemplo 3.4

En la Tabla 3.3 se muestran los resultados de carga y elongación obtenidos en el ensayo de tracción de una aleación de aluminio. La probeta se fabricó con un diámetro estándar de 0.5 pulgadas, mientras que la distancia entre puntos se estableció en 2.0 pulgadas.

a) Obtener el diagrama esfuerzo-deformación para esta aleación de aluminio.
b) Determinar el módulo de elasticidad del material, su límite de fluencia, resistencia a la tracción, resistencia a la fractura y el porcentaje de elongación.

Tabla 3.3 Datos de carga y elongación para el ensayo del ejemplo 3.4

Elongación	Carga	Elongación	Carga
(mm)	(N)	(mm)	(N)
0.010	1913	0.450	31223
0.025	4782	0.500	31445
0.050	9564	0.750	32230
0.075	14346	1.000	32746
0.100	19127	2.500	34295
0.125	23782	5.000	35437
0.150	26827	5.500	35216
0.175	28126	6.000	34836
0.200	28848	6.500	33316
0.225	29339	7.000	31036
0.250	29709	7.500	27869
0.275	30005	8.000	24702
0.300	30253	8.500	20648
0.350	30650	9.000	16468
0.400	30964		

Solución: a) A fin de obtener el diagrama esfuerzo-deformación para esta aleación de aluminio, primero dividimos las elongaciones reportadas en la Tabla 3.3 por la distancia entre puntos (2 pulgadas = 50.8 mm) de la probeta, obteniendo así las deformaciones longitudinales en cada punto:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_o} = \frac{\Delta l_i\,(mm)}{2 \times 25.4\ mm} = \frac{\Delta l_i}{50.8}$$

Posteriormente, calculamos los esfuerzos axiales dividiendo las cargas de la Tabla 3.3 por el área de la sección transversal original de la probeta:

$$\sigma_i = \frac{P_i}{A_o} = \frac{P_i \times 10^{-6}}{\frac{\pi}{4}(0.5 \times 25.4 \times 10^{-3})^2} = 0.007894 P_i\ \text{[MPa]}$$

Obtenemos así la Tabla 3.4 y el diagrama esfuerzo-deformación mostrado en la Fig. 3.16.

Tabla 3.4 Esfuerzos y deformaciones en el ensayo del ejemplo 3.4

Deformación	Esfuerzo	Deformación	Esfuerzo
(mm/mm)	(MPa)	(mm/mm)	(MPa)
1.97×10^{-4}	15	8.86×10^{-3}	246
4.92×10^{-4}	38	9.84×10^{-3}	248
9.84×10^{-4}	75	1.48×10^{-2}	254
1.48×10^{-3}	113	1.97×10^{-2}	259
1.97×10^{-3}	151	4.92×10^{-2}	271
2.46×10^{-3}	188	9.84×10^{-2}	280
2.95×10^{-3}	212	1.08×10^{-1}	278
3.44×10^{-3}	222	1.18×10^{-1}	275
3.94×10^{-3}	228	1.28×10^{-1}	263
4.43×10^{-3}	232	1.38×10^{-1}	245
4.92×10^{-3}	235	1.48×10^{-1}	220
5.41×10^{-3}	237	1.57×10^{-1}	195
5.91×10^{-3}	239	1.67×10^{-1}	163
6.89×10^{-3}	242	1.77×10^{-1}	130
7.87×10^{-3}	244		

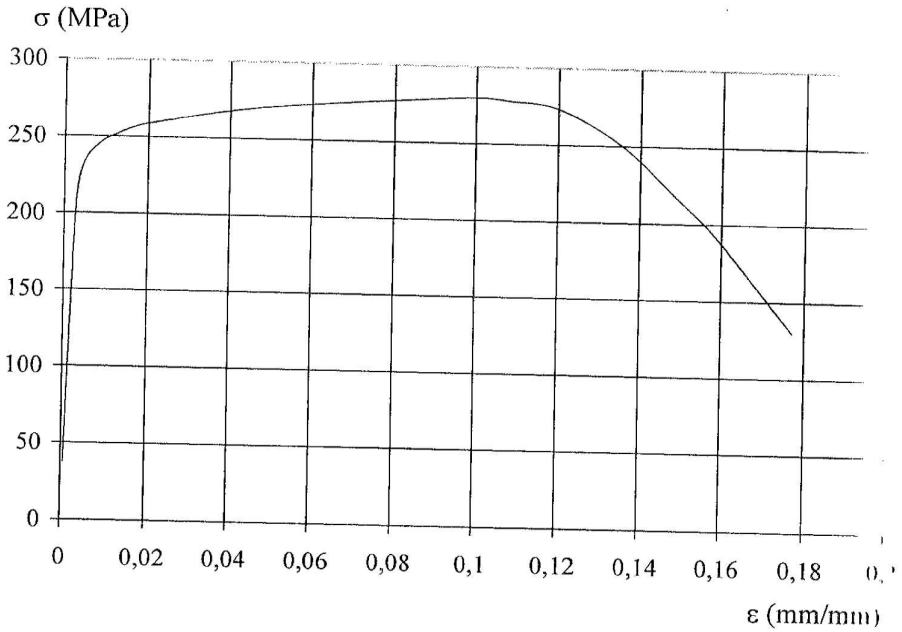


Figura 3.16 Diagrama esfuerzo-deformación para el ensayo del ejemplo 3.4

b) La resistencia a la tracción y la resistencia a la fractura de esta aleación de aluminio pueden obtenerse fácilmente de la Tabla 3.4 o del diagrama de la Fig. 3.16. Sus valores son $S_u = 280$ MPa y $S_u = 130$ MPa, respectivamente.

El porcentaje de elongación viene dado por (ver Tabla 3.3)

$$\% \text{ elongación} = \frac{l_f - l_o}{l_o} \times 100 = \frac{9 \text{ mm}}{2 \times 25.4 \text{ mm}} \times 100 = 18 \%$$

Para determinar con cierto nivel de precisión los valores del módulo de elasticidad y del límite de fluencia resultará conveniente ampliar el diagrama esfuerzo-deformación de la Fig. 3.16 y representar únicamente los valores correspondientes al rango de deformaciones $0 \leq \varepsilon \leq 0.01$, tal como se aprecia en la Fig. 3.17.

Utilizando entonces esta figura, el módulo de elasticidad puede calcularse aproximadamente como

$$E = \frac{76 \text{ MPa}}{0.001 \times 10^{-3}} = 76000 \text{ MPa} = 76 \text{ GPa}$$

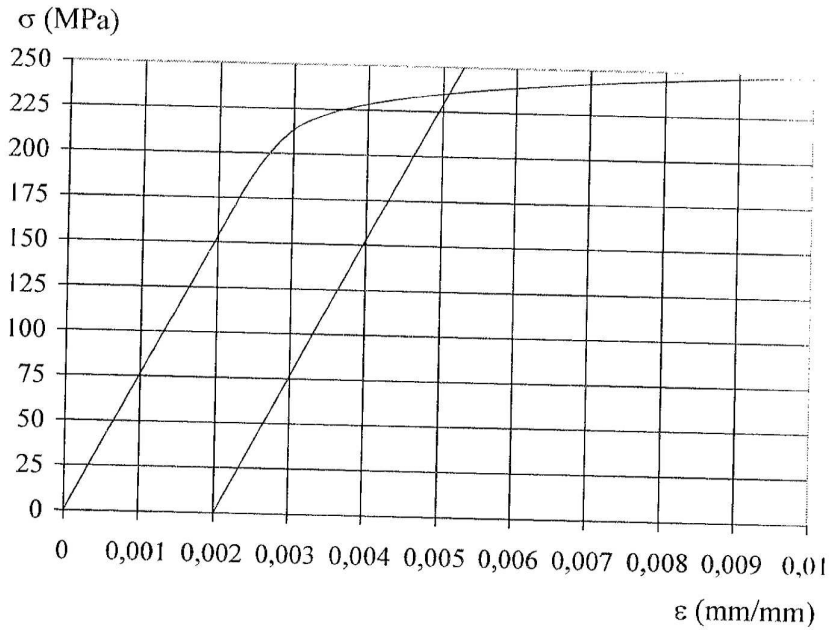


Figura 3.17 Determinación del límite de fluencia en el ejemplo 3.4

Naturalmente, el módulo de elasticidad puede también calcularse directamente de los datos de la Tabla 3.4. Sin embargo, en este caso resultará necesario considerar varios puntos dentro de la zona lineal y calcular el promedio de los módulos de elasticidad calculados para los puntos considerados.

Para determinar el límite de fluencia, trazamos una recta que pase por el punto (0.002, 0) y sea paralela al tramo inicial de la curva esfuerzo-deformación, como se observa en la Fig. 3.17. La intersección de esta recta con la curva esfuerzo-deformación nos proporciona el valor del límite del fluencia. Su valor aproximado es $S_y = 235$ MPa.

La deformación total cuando se alcanza el límite de fluencia es aproximadamente 0.005, la cual se compone de una deformación plática o permanente de 0.002 más una deformación elástica recuperable igual a 0.003.

El límite proporcional puede también ser determinado de manera aproximada en la Fig. 3.17 trazando una recta superpuesta a la zona lineal del diagrama y detectando el punto en el cual se produce la separación entre la recta trazada y la curva esfuerzo deformación. Obviamente, la precisión con la cual puede detectarse este punto de bifurcación depende de las escalas adoptadas. En el presente ejemplo puede tomarse como un límite proporcional aproximado $S_p = 180$ MPa.

3.4 Diagrama real esfuerzo-deformación

El diagrama convencional esfuerzo-deformación estudiado en la sección precedente proporciona información adecuada sobre el comportamiento de los materiales desde el punto de vista de su utilización práctica en problemas de ingeniería. Sin embargo, esta manera de representar las relaciones entre el esfuerzo axial y la deformación resultante nos suministra una serie de datos poco precisos acerca de las características de deformación de una material debido a que está totalmente basada en las dimensiones iniciales de la probeta. Dado que estas dimensiones varían en el transcurso del ensayo, los esfuerzos y las deformaciones representadas en el diagrama no son reales sino, más bien, nominales.

Si en el diagrama se utiliza el *esfuerzo real* $\underline{\sigma}$, basado en el área instantánea real de la sección transversal de la probeta, y si, además, se usa la *deformación real o natural* $\underline{\varepsilon}$, basada también en las dimensiones instantáneas, el diagrama obtenido se denomina *curva real esfuerzo-deformación*.

Definimos el esfuerzo real o natural $\underline{\sigma}$ como la carga instantánea P_i aplicada por unidad de área, también instantánea, de la sección transversal de la probeta. Es decir

$$\underline{\sigma} = \frac{P_i}{A_i} \tag{3.43}$$

Para definir la deformación natural $\underline{\varepsilon}$ debemos partir desde el comienzo del ensayo cuando la longitud indeformada de la probeta es l_o. Cuando la carga adquiere un valor instantáneo P_1, la longitud instantánea de la probeta será l_1 y la deformación será $\varepsilon_1 = (l_1 - l_o)/l_o$. Análogamente, cuando la carga aumenta en una pequeña cantidad hasta un valor P_2, la longitud instantánea de la probeta será l_2 y el incremento en la deformación con relación a la situación precedente será $\varepsilon_2 = (l_2 - l_1)/l_1$. Si proseguimos este análisis, llegamos a la conclusión de que la deformación real total $\underline{\varepsilon}$ de la probeta en la n-ésima etapa será

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon} &= \frac{l_1 - l_o}{l_o} + \frac{l_2 - l_1}{l_1} + \ldots + \frac{l_n - l_{n-1}}{l_n} \\ &= \frac{\Delta l_o}{l_o} + \frac{\Delta l_1}{l_1} + \ldots + \frac{\Delta l_{n-1}}{l_{n-1}} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta l_i}{l_i}\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $\Delta l_i \to 0$, obtenemos que

$$\underline{\varepsilon} = \int_{l_o}^{l} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_o} \tag{3.44}$$

Ahora bien, la deformación nominal viene definida por

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_o}{l_o} = \frac{l - l_o}{l_o} = \frac{l}{l_o} - 1$$

De donde se obtiene que $l / l_o = \varepsilon + 1$. Luego

$$\underline{\varepsilon} = \ln(\varepsilon + 1) \tag{3.45}$$

Es posible también obtener una relación entre los esfuerzos real y nominal. A tal efecto escribimos

$$\underline{\sigma} = \frac{P_i}{A_i} = \frac{P_i}{A_o} \frac{A_o}{A_i} = \sigma \frac{A_o}{A_i}$$

donde σ es el esfuerzo nominal.

Suponiendo que el volumen se mantiene esencialmente constante a lo largo del ensayo[49], tenemos que $A_o l_o = A_i l_i$. Entonces

$$\underline{\sigma} = \sigma \frac{l_i}{l_o}$$

Pero $l_i / l_o = \varepsilon + 1$, luego

$$\underline{\sigma} = \sigma(\varepsilon + 1) \tag{3.46}$$

Para trazar cómodamente el diagrama real esfuerzo-deformación a partir del diagrama convencional, podemos utilizar las expresiones (3.45) y (3.46). En la Fig. 3.18 se observa una curva real típica esfuerzo-deformación para una metal dúctil. Nótese que en este caso el esfuerzo es una función creciente de la

[49] Esto es exactamente cierto solo después que se supera el límite elástico.

deformación a todo lo largo del ensayo debido a que ahora se está considerando el área instantánea de la probeta.

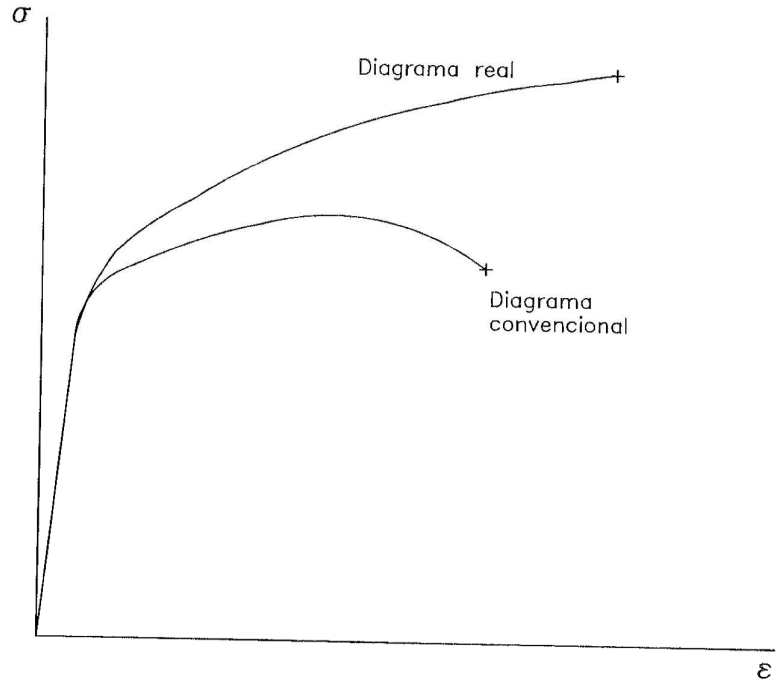


Figura 3.18 Diagramas real y convencional esfuerzo-deformación

Problemas

3.1 Las deformaciones generadas en un punto por un estado plano de esfuerzos vienen dadas por

$$\varepsilon_x = 9\times10^{-4}$$
$$\varepsilon_y = 4\times10^{-4}$$
$$\gamma_{xy} = -4.5\times10^{-4}$$

Determine los esfuerzos principales sabiendo que las propiedades elásticas del material son $E = 2.1\times10^6$ kgf/cm^2 y $\nu = 0.29$.

3.2 Para el estado de deformaciones definido por

$$\varepsilon_x = 3\times10^{-4}$$
$$\varepsilon_y = -2\times10^{-4}$$
$$\varepsilon_z = -5\times10^{-4}$$
$$\gamma_{yz} = 3\times10^{-4}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$$

Determine:

a) Los esfuerzos principales.

b) El esfuerzo de corte máximo.

El módulo de elasticidad del material es $E = 2.1\times10^4$ kgf/mm^2 y el módulo de Poisson es $\nu = 1/3$.

3.3 ¿Considera usted posible que exista un material con un módulo de elasticidad $E = 30\times10^6$ psi para el cual $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1\times10^{-4}$ y $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -37500$ psi ? Argumente objetivamente su respuesta.

3.4 Bajo la acción de una fuerza F desconocida, el punto C de la viga ABC mostrada en la Fig. P.3.4 se desplaza verticalmente 4 mm. Determine el esfuerzo axial promedio en el cable BD sabiendo que éste es de acero con un módulo de elasticidad $E = 2.1\times10^4$ kgf/mm^2 y un módulo de Poisson $\nu = 0.33$. La viga ABC puede considerarse rígida en comparación con el cable BD.

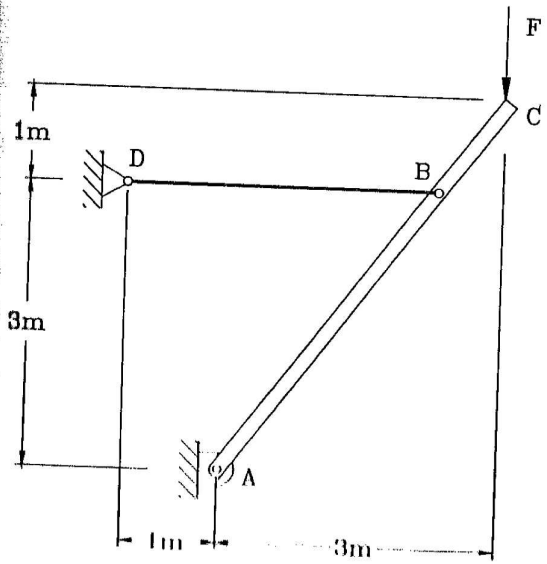


Figura P.3.4

3.5 Considere un estado de esfuerzos como el mostrado en la Fig. P.3.5. Si las deformaciones normales en las direcciones y y z valen la mitad del valor que tendrían si no existieran los esfuerzos σ_y y σ_z, determine las tres deformaciones normales ε_x, ε_y y ε_z, así como los esfuerzos σ_y y σ_z, sabiendo que $\sigma_x = -20$ kgf/mm^2, $E = 2.1\times10^4$ kgf/mm^2 y $\nu = 1/3$.

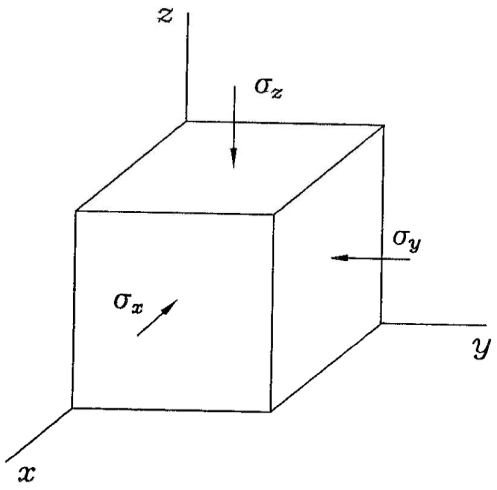


Figura P.3.5

3.6 En un punto sobre la superficie de un elemento de máquina sometido a un estado plano de esfuerzos se sabe que $\gamma_{máx} = 4\times10^{-4}$ y que la suma de los esfuerzos normales sobre dos planos perpendiculares entre sí y ortogonales a la superficie de la pieza es 17 kgf/mm^2. Calcule la magnitud de los esfuerzos principales sabiendo que las propiedades del material son $E = 2.1\times10^4$ kgf/mm^2 y $\nu = 0.25$.

3.7 El estado de esfuerzos en un punto de una pieza de aluminio está definido por

$$\sigma_x = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

a) Determine el estado de deformaciones referido al sistema de coordenadas x, y, z.

b) Determine los esfuerzos principales y dibuje su orientación con relación a los ejes x, y, z.

c) Encuentre las deformaciones principales a partir del estado de deformaciones determinado en la parte (a) así como también a partir de los esfuerzos principales calculados en la parte (b).

d) Si alrededor del punto se dibuja un pequeño cuadrado de 5mm de lado, ¿Cómo sería su configuración deformada?

Utilice las propiedades elásticas de la Tabla 3.1.

3.8 En un punto de una pieza de acero las componentes de la matriz de deformaciones están definidas por

$$\varepsilon_x = 4.5\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = -7\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = 2\times10^{-4}$$

$$\gamma_{yz} = 1.5\times10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$$

¿Es posible que estas deformaciones sean producidas por un estado plano de esfuerzos? Utilice las propiedades elásticas de la Tabla 3.1.

3.9 Las deformaciones definidas en el problema 2.15 del Cap. 2 son producidas por un estado plano de esfuerzos. Calcule la deformación tangencial máxima para este estado de deformaciones y compárela con las deformación tangencial máxima en el plano xy. Suponga que ν=1/3.

3.10 Una pieza cilíndrica construida de un determinado material está sometida a esfuerzos normales en la dirección de su eje longitudinal y distribuidos uniformemente sobre su sección transversal, tal como se indica en la Fig. P.3.10.

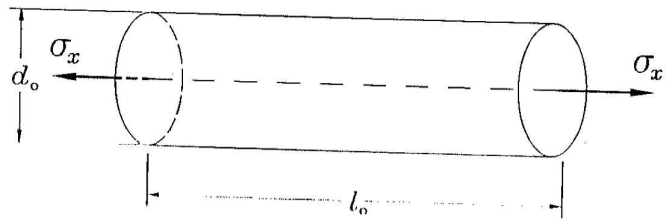


Figura P.3.10

Bajo la acción de este estado de esfuerzos, la pieza sufre una deformación axial $\varepsilon_x = 4\times10^{-3}$. Si la longitud inicial del cilindro es l_o 50 mm y su diámetro inicial $d_o = 10$ mm, determine si es posible que, para las condiciones dadas, la pieza experimente una variación de volumen de 6 mm^3.

3.11 La lámina de acero *ABCD* de 200×200×5 mm se deforma, bajo la aplicación de un determinado sistema de cargas, hasta llegar a la configuración *A'B'C'D'* mostrada con líneas de trazos en la Fig. P.3.11. El estado de deformaciones es uniforme en toda la placa y las propiedades elásticas del material son $E = 205$ GPa y $\nu = 1/3$. Sabiendo que el estado de esfuerzos que provoca estas deformaciones es plano, determine la deformación tangencial máxima.

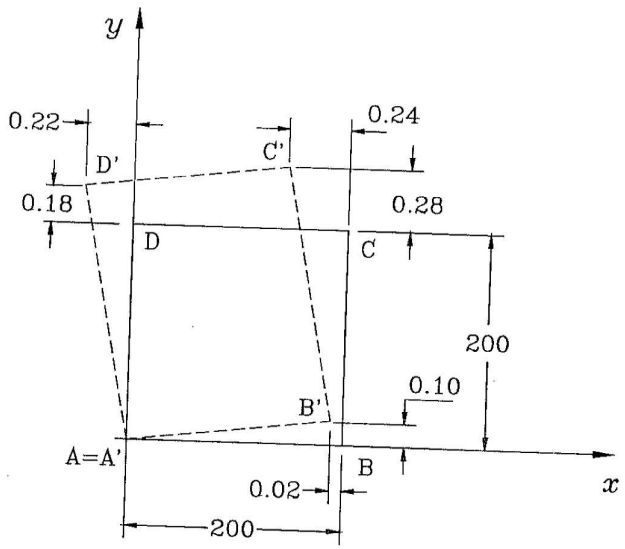


Figura P.3.11

3.12 Una placa romboidal *ABCD* se deforma, bajo la aplicación de un determinado estado de esfuerzos, hasta llegar a la configuración *A'B'C'D'* mostrada con líneas de trazos en la Fig. P.3.12.

a) Demuestre que el estado de deformaciones uniforme en toda la placa
b) Determine el esfuerzo de corte máximo suponiendo que el estado de esfuerzos es plano.

c) Determine el esfuerzo de corte máximo suponiendo que el estado de deformaciones es plano.

La placa es de aluminio con un módulo de elasticidad $E = 7.2 \times 10^3$ kgf/cm^2 y un módulo de Poisson $\nu = 1/3$.

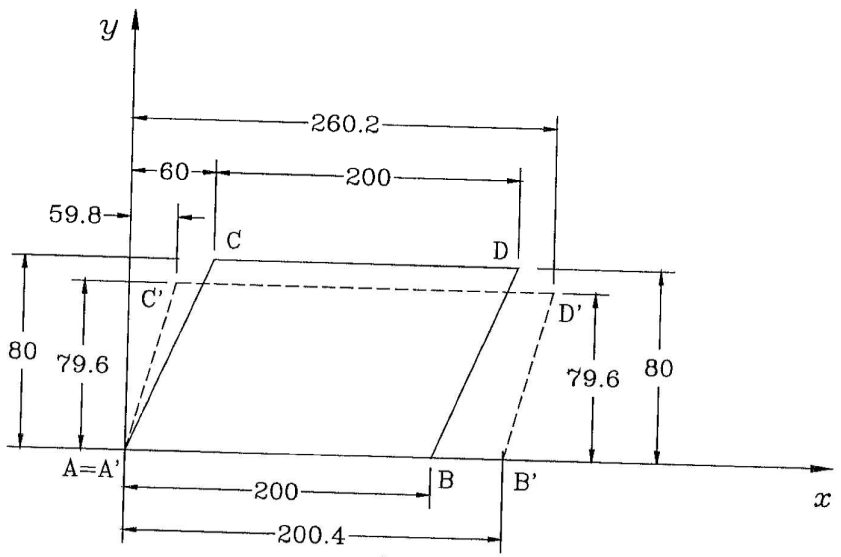


Figura P.3.12

3.13 Como se sabe, un estado de deformaciones es plano si una de las deformaciones principales es nula. Suponga que el eje *z* sea esa dirección principal. Luego $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Demuestre que en este caso las ecuaciones constitutivas pueden escribirse como

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E'} - \frac{\nu'}{E'}\sigma_y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E'} - \frac{\nu'}{E'}\sigma_x$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G'}$$

y determine las constantes E', G' y ν' en términos de las propiedades elásticas del material E y ν.

3.14 Con el fin de estimar el esfuerzo de corte máximo en un punto P ubicado sobre la superficie de un elemento de máquina, se escogen tres puntos A, B y C equidistantes del punto P cuando la pieza está descargada, tal como se muestra en la Fig. P.3.14a. A continuación el elemento se carga y estos puntos pasan a ocupar las posiciones P', A', B' y C', como se indica en la Fig. P.3.14b. Las distancias iniciales entre los puntos son $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = 10$ mm, mientras que en la configuración final son $\overline{P'A'} = 10.02$ mm, $\overline{P'B'} = 10.01$ mm y $\overline{P'C'} = 9.98$ mm. Considerando que el estado de esfuerzos en la superficie de la pieza es plano y que las propiedades elásticas del material son $E = 200$ GPa y $\nu = 1/3$, determine entonces el esfuerzo de corte máximo en el punto P.

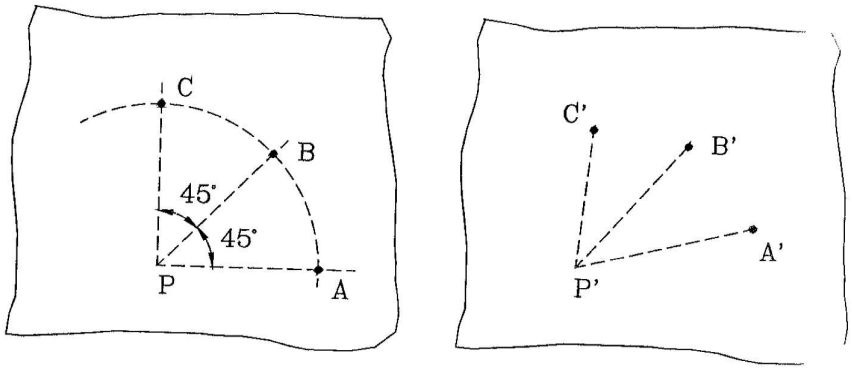


Figura P.3.14

3.15 Alrededor de un punto ubicado sobre la superficie de una pieza se dibuja una cuadrado $ABCD$ de 1 cm de lado, tal como se muestra en la Fig. P.3.15. Cuando la pieza se somete a un sistema de cargas, el cuadrado se deforma pasando a la configuración $A'B'C'D'$ mostrada con líneas de trazos. Sabiendo que se trata de un estado plano de esfuerzos, ¿Podría usted predecir en este caso el valor del esfuerzo cortante τ_{xy} y el de la deformación normal ε_z sin conocer las propiedades elásticas del material?

3.16 En un punto P de un sólido sometido a estado plano de esfuerzos (ver Fig. P.3.16) se han medido las siguientes deformaciones

$$\varepsilon_x = 3\times10^{-4}, \qquad \varepsilon_a = 0, \qquad \varepsilon_z = -1\times10^{-4}$$

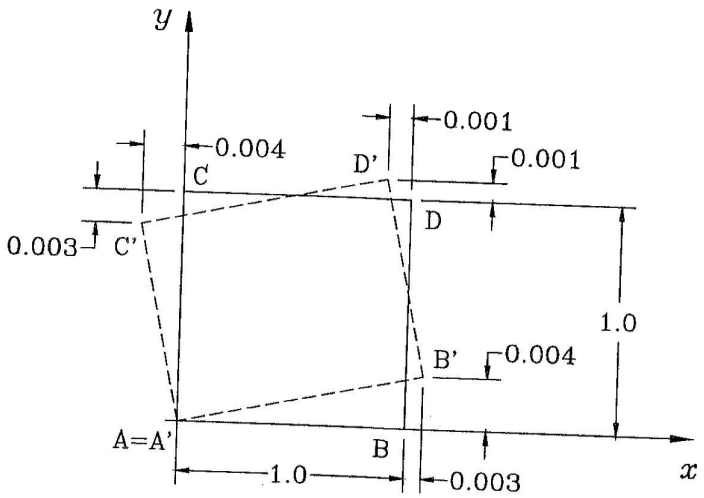


Figura P.3.15

Sabiendo que se trata de un material con un módulo de Elasticidad $E = 2\times10^6$ kgf/cm^2 y un módulo de Poisson $\nu = 0.25$, determine:

a) La magnitud de los esfuerzos principales en el punto P.
b) El esfuerzo de corte máximo.

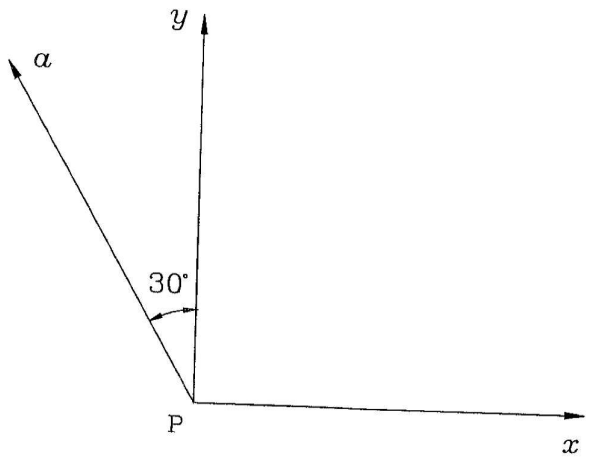


Figura P.3.16

3.17 Al aplicarse un sistema de cargas a un elemento de máquina, un cuadrado $2\sqrt{2}$ mm de lado dibujado alrededor de un punto sobre su superficie se deformó como se muestra en la Fig. P.3.17. La longitud final del lado AD es $\overline{AD'} = 2.8276$ mm, mientras que la longitud final de la diagonal AC resultó ser $\overline{AC'} = 3.9988$ mm. El ángulo final entre los lados AB y AD es de 90° 4' 8". Las propiedades elásticas del material son $E = 200$ GPa y $\nu = 0.5$. Considerando que se trata de un estado plano de esfuerzos, determine el esfuerzo de corte máximo en el punto considerado.

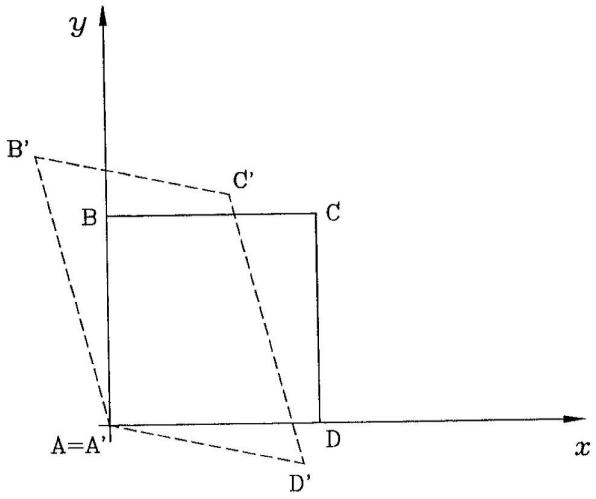


Figura P.3.17

3.18 Con el fin de determinar el estado de esfuerzos en un punto de una superficie de una pieza, se trazó un rectángulo pequeño de dimensiones 8.5 × 3.5 mm alrededor de dicho punto. Cuando la pieza fue instalada y sometida al sistema de cargas que deberá soportar durante su funcionamiento habitual, el rectángulo se deformó tal como se muestra con líneas de trazos en la Fig. P.3.18. Al medir las longitudes finales de los cuatro lados del paralelogramo resultante se encontró que $\overline{AB'} = \overline{D'C'} = 8.50765$ mm, $\overline{AD'} = \overline{B'C'} = 3.50105$ mm y $\overline{AC'} = 9.19790$ mm. Sabiendo que las propiedades elásticas del material son $E = 2.1 \times 10^6$ kgf/cm^2 y $\nu = 1/3$, determine la matriz de esfuerzos en el punto considerado suponiendo que el estado de deformaciones que se produce es plano.

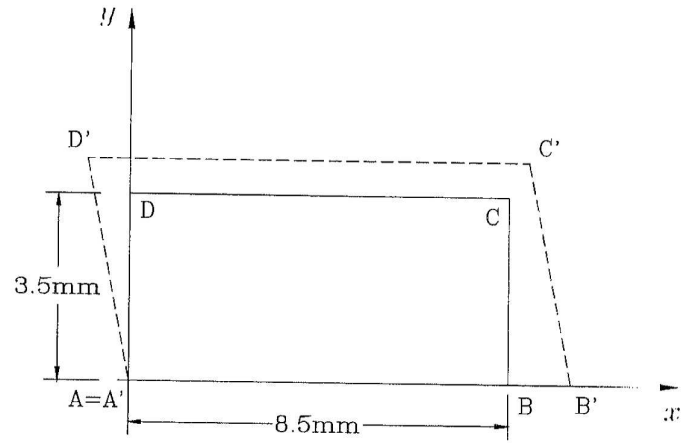


Figura P.3.18

3.19 Para un cierto punto de un sólido se encontró que las deformaciones normales en las tres direcciones mostradas en la Fig. P.3.19 son

$$\varepsilon_a = 6.5 \times 10^{-4}, \qquad \varepsilon_b = -3.5 \times 10^{-4}, \qquad \varepsilon_c = 3 \times 10^{-4}$$

Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano y que $E = 2.1 \times 10^6$ kgf/cm^2 y $\nu = 0.25$, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo de corte máximo.

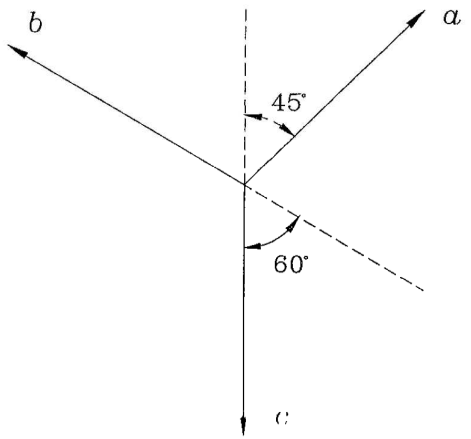


Figura P.3.19

3.20 En la Figura P.3.20 se muestran las vistas frontal y superior de un cubo de aluminio de lado a colocado en el interior de una cavidad infinitamente rígida comparada con el aluminio. Como se observa, entre el cubo y la cavidad el ajuste es perfecto en la dirección del eje x, pero en la dirección del eje y existe una holgura δ a ambos lados del cubo. Suponiendo que no existen fuerzas de fricción entre el cubo y las paredes de la cavidad, determine el desplazamiento uniforme h que debe dársele a la superficie superior del cubo para que éste se expanda lateralmente hasta que desaparezca la holgura δ. Suponga que el módulo de elasticidad E y el módulo de Poisson ν del cubo son propiedades conocidas.

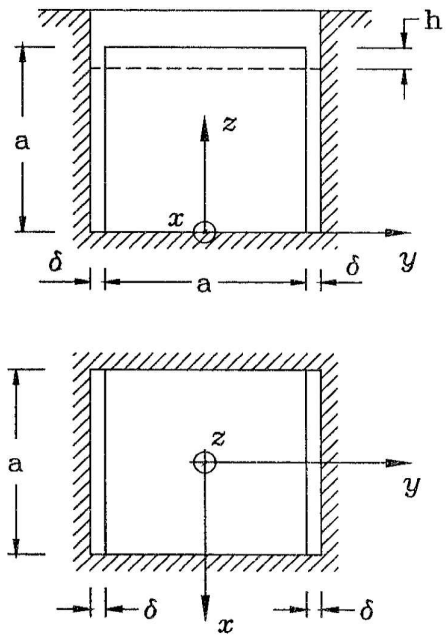


Figura P.3.20

3.21 Entre el bloque central de dimensiones $a \times b \times c$ y los dos bloques laterales de dimensiones $d \times b \times e$ existe un desnivel $h = c - e$, tal como se muestra en la Fig. P.3.21. Para eliminar este desnivel se le aplica al bloque central un fuerza F a través de un troquel que le transmite una presión uniforme $\sigma_z = -p$ sobre su cara superior. Los bloques son de aluminio con un módulo de elasticidad $E = 7000$ kgf/mm^2 y un módulo de Poisson $\nu = 1/3$. Sus dimensiones son $a = 80$ mm, $b = 90$ mm, c 60 mm, d 20

mm y e 59 mm. Suponiendo que la matriz es infinitamente rígida comparada con el aluminio y despreciando las fuerzas de fricción:

a) Determine la fuerza F que debe aplicársele al troquel para eliminar el desnivel considerando que los bloques pueden expandirse libremente en la dirección x.

b) Si se restringe la expansión de los tres bloques en la dirección del eje x, ¿La fuerza necesaria para nivelarlos sería mayor o menor que la determinada anteriormente?

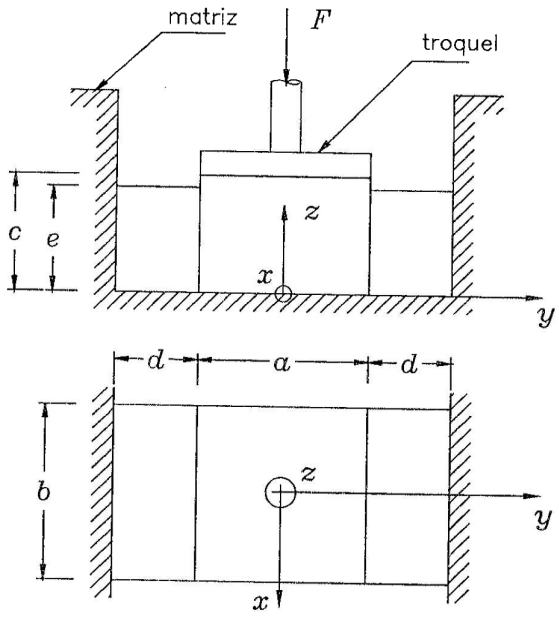


Figura P.3.21

3.22 En la Fig. P.3.22 se muestran las vistas frontal y superior de dos bloques de titanio de dimensiones $a \times b \times c$. Al bloque de la derecha se le aplica una fuerza F a través de un troquel que le transmite una presión uniforme $\sigma_z = -p$ sobre su cara superior. Suponiendo que la matriz es infinitamente rígida comparada con el titanio y despreciando las fuerzas de fricción, determine la fuerza F que debe aplicársele al troquel para eliminar la holgura lateral h, considerando en su análisis que ambos bloques pueden expandirse libremente en la dirección x. Las dimensiones de los bloques son a 80 mm, b = 60 mm y c = 70 mm. La holgura lateral es h = 0.06 mm. El módulo de elasticidad del titanio es E 110 GPa y su módulo de Poisson es ν 0.33.

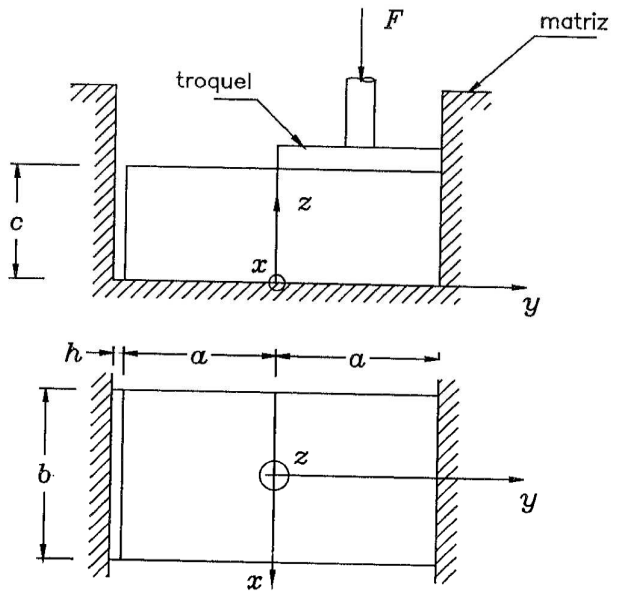


Figura P.3.22

3.23 La curva esfuerzo-deformación para algunos metales puede ser convenientemente representada por la ecuación de tres parámetros

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H}\right)^p$$

propuesta originalmente por Ramberg y Osgood. En esta ecuación, E es el módulo de elasticidad, p es el inverso del coeficiente de endurecimiento por deformación y H es una constante. Demuestre que esta ecuación puede escribirse como

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 2\times 10^{-3}\left(\frac{\sigma}{S_y}\right)^p$$

donde S_y es el límite de fluencia del material.

3.24 El límite de fluencia S_y se ha definido como el máximo esfuerzo que se puede aplicar sin que se produzca más que una deformación plástica permanente de 0.002. Considere ahora otro límite de fluencia $S_y^* < S_y$ definido como el máximo esfuerzo que se puede aplicar sin que se produzca más que una deformación plástica permanente de 0.001

Demuestre entonces que la ecuación de Ramber-Osgood presentada e problema anterior puede ser escrita como

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 2\times 10^{-3}\left(\frac{\sigma}{S_y}\right)^p$$

donde

$$p = \frac{\log\,(2.0)}{\log\,(S_y / S_y^*)}$$

3.25 En la En la Tabla P.3.1 se muestran los resultados de carga y elongaci obtenidos en el ensayo de tracción de un acero estructural de a resistencia. La probeta se fabricó con un diámetro estándar de (pulgadas, mientras que la distancia entre puntos se estableció en 2 pulgadas.

a) Obtener el diagrama esfuerzo-deformación.
b) Determinar el módulo de elasticidad del material, su límite fluencia, resistencia a la tracción, resistencia a la fractura y porcentaje de elongación.

Tabla P.3.1 Datos de carga y elongación para el ensayo para el problema 3.25

Elongación (mm)	Carga (N)	Elongación (mm)	Carga (N)
0.010	5194	0.500	47504
0.025	13048	0.750	48644
0.050	26095	1.000	49784
0.075	35976	2.500	52951
0.100	39270	5.000	55738
0.125	41 043	5.500	55991
0.150	42057	6.000	56245
0.175	42817	6.500	56498
0.200	43450	7.000	56118
0.250	44464	7.500	54471
0.275	44844	8.000	51938
0.300	45224	8.500	48137
0.350	45604	9.000	44337
0.400	46364	9.500	39777

3.26 Se comprime un paralelepípedo de un material elástico, lineal e isótropo en la dirección del eje x mientras se impide la dilatación en la dirección y. Demuestre que el módulo de elasticidad aparente $E' = \sigma_x/\varepsilon_x$ en la dirección del eje x es $E/(1-\nu^2)$.

3.27 Si en el problema anterior se impiden las dilataciones en la dirección de los eje y y z, demuestre que el módulo de elasticidad aparente $E' = \sigma_x/\varepsilon_x$ en la dirección del eje x es

$$E' = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

3.28 Un cambio de temperatura ΔT produce deformaciones

$$\varepsilon_x^{(\Delta T)} = \varepsilon_y^{(\Delta T)} = \varepsilon_z^{(\Delta T)} = \alpha \Delta T$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

donde α es el llamado coeficiente de dilatación lineal del material. Suponiendo que las deformaciones provocadas por los esfuerzos y las provocadas por el cambio de temperatura pueden superponerse, que el material es elástico, lineal e isótropo y que el cambio de temperatura no afecta las propiedades del material, demuestre que

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \alpha(3\lambda + 2G)\Delta T$$
$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \alpha(3\lambda + 2G)\Delta T$$
$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \alpha(3\lambda + 2G)\Delta T$$
$$\tau_{xy} = 2G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 2G\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = 2G\gamma_{yz}$$

A estas ecuaciones se las conoce como *Ley de Duhamel-Neumann*.

3.29 Escriba las ecuaciones constitutivas del problema anterior en términos de las propiedades elásticas E y ν.

3.30 La barra de sección transversal constante A mostrada en la Fig. P.3.30 puede expandirse libremente en las direcciones x y y, mientras que los desplazamientos en z están restringidos en los extremos P y Q. Si la barra experimenta un cambio de temperatura uniforme ΔT, determine los tensores de esfuerzo σ y de deformación ε en función de E, ν, α y ΔT, despreciando la fricción en los extremos de la barra.

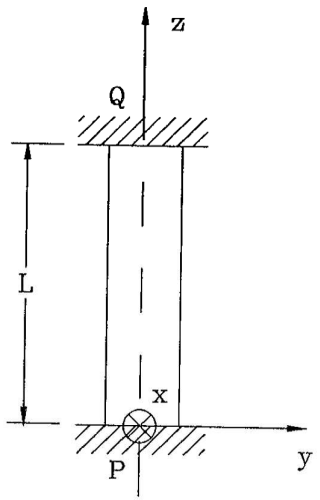


Figura P.3.29

3.31 Considere el estado de esfuerzos definido por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

El módulo de compresión η se define como el cociente entre la compresión p y la dilatación volumétrica $\kappa = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$. Esto es

$$\eta = -\frac{p}{\kappa} = -\frac{p}{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$

Demuestre que

$$\eta = \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

3.32 Demuestre que la matriz de esfuerzos en un punto de un sólido elástico, lineal e isótropo puede expresarse como

$$\sigma = 3\eta\varepsilon^i + 2G\varepsilon^d$$

donde η es el módulo de compresión, G es el módulo de corte y ε^i y ε^d son las componentes isotrópica y desviadora de la matriz de deformaciones definidas por

$$\varepsilon^i = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon^d = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - e & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y - e & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z - e \end{bmatrix}$$

donde

$$e = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$$

3.33 Demuestre que la matriz de deformaciones en un punto de un sólido elástico, lineal e isótropo puede expresarse como

$$\varepsilon = \frac{1}{3\eta}\sigma^i + \frac{1}{2G}\sigma^d$$

donde η es el módulo de compresión, G es el módulo de corte y σ^i y σ^d son las componentes isotrópica y desviadora de la matriz esfuerzos definidas por

$$\sigma^i = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}, \qquad \sigma^d = \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - p \end{bmatrix}$$

donde

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Capítulo 4

Teorías de Falla

4.1 Introducción

En un sentido amplio, se considera que un elemento mecánico o estructural ha fallado cuando se vuelve incapaz de desempeñar con seguridad la función para la cual fue diseñado. Lo que nos proponemos en este capítulo es justamente resolver el problema fundamental de predecir la falla de tales componentes suponiendo que se conoce la matriz de esfuerzos en aquellos puntos considerados como críticos.

Las diferentes fallas que presentan los materiales pueden agruparse en cuatro categorías: fractura, deformación, corrosión y desgaste. En nuestro estudio serán consideradas únicamente la falla por fractura y la falla por deformación plástica o falla por fluencia. Dentro de ellas consideraremos exclusivamente las fallas producidas por cargas estáticas, excluyendo la falla por *fatiga*, que es producida por cargas cíclicas, y las fallas que dependen del tiempo de aplicación de las cargas, denominadas fallas por termofluencia.

Se dice que un material ha fallado por *fluencia* cuando la deformación plástica en algún punto es superior a un cierto valor límite, normalmente convenido en 0.002. Este tipo de falla se asocia generalmente con esfuerzos

tangenciales y ocurre como consecuencia del deslizamiento de planos de átomos sin que se modifique la continuidad en la estructura del material. Las distancias interatómicas no varían en el proceso de deformación plástica, el cual es irreversible.

Se dice que un material ha fallado por *fractura* cuando se separa en dos o más partes. La fractura de un material puede ser dúctil o frágil. Una fractura se considera *dúctil* cuando presenta una deformación plástica apreciable antes de que se produzca la falla. En caso contrario se dice que es *frágil*. En algunos casos puede ocurrir que una fractura frágil sea parcialmente dúctil y viceversa. La fractura frágil se asocia normalmente con la presencia de esfuerzos normales de tracción y ocurre como consecuencia de que las fuerzas cohesivas entre los átomos son superadas por las solicitaciones externas. Esta fractura es normal en materiales como la fundición gris, el acero para herramientas de corte, el concreto, la porcelana y el vidrio, entre otros. La fractura dúctil, por otra parte, es común en los aceros, aleaciones de aluminio y muchos otros metales que presentan, como se dijo ya, una gran deformación plástica antes de la fractura.

Lo deseable, normalmente, es que la fractura, si se presenta, sea dúctil, pues la fractura frágil ocurre repentinamente y sin advertencia alguna. Se han presentado muchos problemas, no obstante, debido a que algunos materiales que normalmente deberían presentar una fractura dúctil han fallado repentinamente como si se tratara de materiales frágiles. Después de muchos estudios se ha determinado la existencia de dos factores fundamentales que incrementan la posibilidad de una fractura frágil: las bajas temperaturas y las cargas de impacto. Estudios detallados de estos factores pueden encontrarse en textos de Ciencia de Materiales.

Ahora bien, apartándonos un poco de estas excepciones y limitándonos a los casos de las fallas por fluencia y por fractura, nuestro problema consiste en poder predecir la falla en un punto de un sólido donde existe un estado general de esfuerzos conocido, teniendo como datos únicamente las propiedades mecánicas obtenidas en un ensayo de tracción en el cual, como se sabe, el estado de esfuerzos es uniaxial. En la actualidad no existe ningún método teórico que nos permita resolver este problema. En su lugar, se han desarrollado varias *teorías de falla*, muchas de ellas con soporte experimental, que nos permiten establecer una equivalencia entre un estado general de esfuerzos y un estado uniaxial como el que se presenta en un ensayo de tracción. La filosofía básica subyacente en estas teorías consiste en postular que dos estados de esfuerzos distintos son equivalentes si un determinado parámetro es idéntico en ambos estados. Dependiendo del parámetro elegido, se tiene una teoría de falla específica. Entre 1856 y 1937 se desarrollaron y pusieron a prueba varias teorías de falla, entre las cuales cabe mencionar las teorías de Maxwell, Mohr,

Coulomb, Saint-Venant, Rankine, Tresca y von Mises, entre otras. De todas ellas, las últimas tres son las únicas que se utilizan hoy en día en el diseño de componentes mecánicos y estructurales debido, esencialmente, al soporte experimental que las respalda.

4.2 Teoría de Rankine

Esta teoría, conocida también como *teoría del esfuerzo principal máximo*, fue propuesta aparentemente por el célebre ingeniero inglés W J. M. Rankine (1820-1872) a mediados del siglo XIX y se utiliza para predecir la falla de aquellos materiales que presentan una fractura de naturaleza frágil. Establece esta teoría que un material fallará por fractura cuando el mayor esfuerzo principal positivo sea superior a la resistencia a la tracción S_{ut} del material, o bien cuando el menor esfuerzo principal negativo supere la resistencia a la compresión S_{uc}.

En la aplicación de esta teoría pueden presentarse tres casos:

Figura 4.1 William J. M. Rankine[50] (1820-1872)

[50] Biografía en http://www.eq.uc.pt/equanuf/rankine.html

a) Supongamos que $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1 > 0$, como se muestra en la Fig. 4.2. En este caso la teoría de Rankine indica que el esfuerzo σ_3 debe ser menor que la resistencia a la tracción S_{ut} del material para que no se produzca la fractura. No se requiere ninguna comparación con respecto a la resistencia a la compresión S_{uc} del material puesto que no existe ningún plano, que pase por el punto en estudio, en el cual el esfuerzo normal sea de compresión.

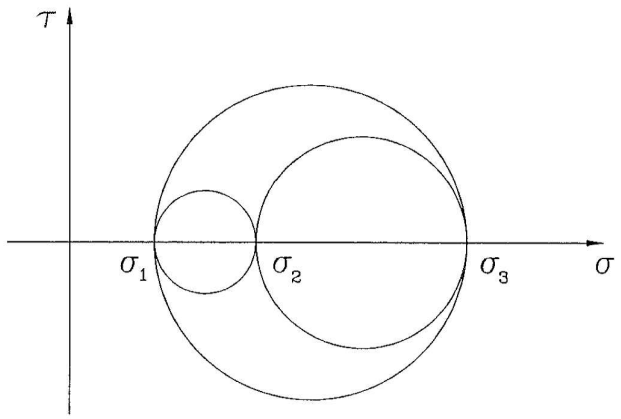


Figura 4.2

b) Si los tres esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 son todos negativos (ver Fig. 4.3), entonces solo se requiere comprobar que el esfuerzo principal σ_1, en valor absoluto, sea inferior que la resistencia a la compresión S_{uc} del material.

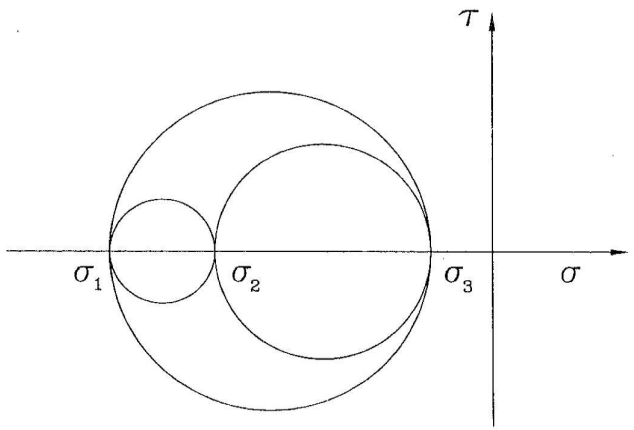


Figura 4.3

c) Por último, si $\sigma_3 > 0$ y $\sigma_1 < 0$ (ver Fig. 4.4), entonces se requ comprobar que $\sigma_3 < S_{ut}$ y $|\sigma_1| < S_{uc}$, simultáneamente.

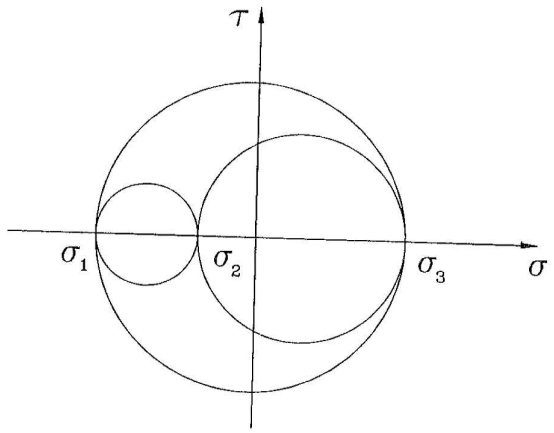


Figura 4.4

Una representación gráfica bastante cómoda para utilizar esta teoría muestra en la Fig. 4.5 en un sistema de coordenadas $\{\sigma_1, \sigma_3\}$. Este diagrama construye con los valores de la resistencia a la tracción S_{ut} y a la compresión del material. Para que el material no falle, el par de valores (σ_1, σ_3). debe est dentro del rectángulo.

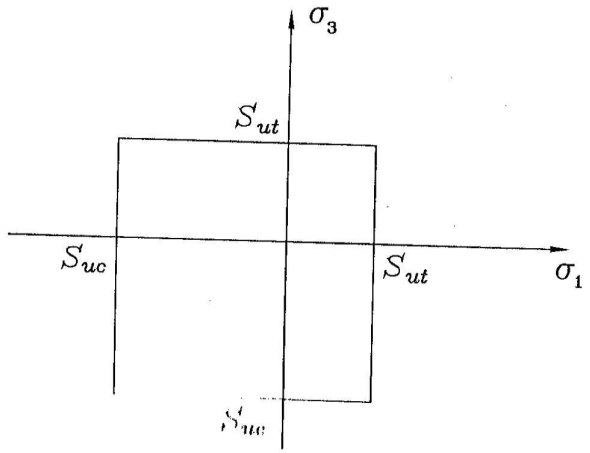


Figura 4.5

El lector debe tener presente que esta teoría no puede utilizarse para predecir fallas por fluencia debido, esencialmente, a que en este tipo de fallas el papel fundamental lo juegan los esfuerzos tangenciales y no los normales.

4.3 Teoría de Tresca

Esta teoría, conocida también como *teoría del esfuerzo cortante máximo*, fue propuesta inicialmente por el científico francés H. Tresca en un artículo presentado en la Academia de Ciencias de París en 1868 y comprobada posteriormente de manera experimental por el investigador inglés J. J. Guest en el año 1900.

Esta teoría establece que un material sometido a un estado general de esfuerzos fallará por fluencia cuando el esfuerzo de corte máximo alcance un determinado valor, el cual corresponde al esfuerzo cortante máximo que se genera en el ensayo de tracción cuando se llega al límite de fluencia.

Del Cap. 1 sabemos que, en general, el esfuerzo de corte máximo viene dado por

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \tag{4.1}$$

Dado que en un ensayo de tracción el estado de esfuerzos es uniaxial, los esfuerzos principales son $\sigma_3 = S_y$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ cuando se alcanza el límite de fluencia, tal como se indica en el diagrama de Mohr de la Fig. 4.6. Luego, el esfuerzo de corte máximo de fluencia es $(\tau_{máx})_y = S_y/2$. Entonces, para que el material no falle por fluencia se debe cumplir que

$$\tau_{máx} < S_y/2 \tag{4.2}$$

O bien, utilizando la Ec. (4.1),

$$\sigma_3 - \sigma_1 < S_y \tag{4.3}$$

Esta teoría se utiliza únicamente para predecir fallas por fluencia en materiales con comportamiento dúctil como el acero y el aluminio, entre otros. Los resultados que se obtienen, tal como se verá más adelante, discrepan de los valores experimentales en un máximo de un 15 % del lado conservador.

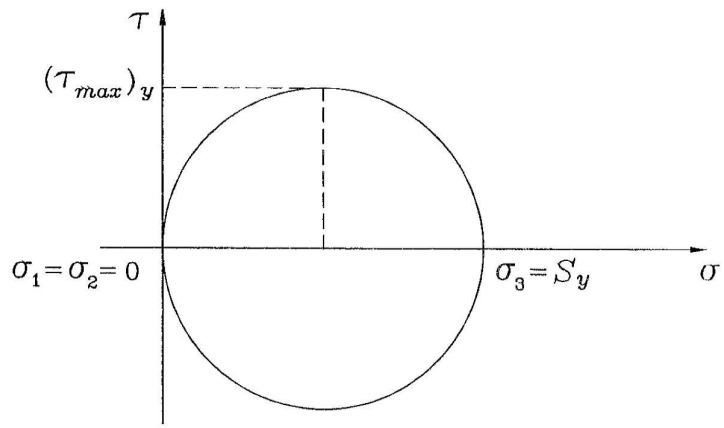


Figura 4.6 Diagrama de Mohr para un ensayo de tracción en el momento para el cual se alcanza la fluencia

Para tener una visión gráfica de esta teoría, consideremos un estado pl de esfuerzos con esfuerzos principales σ_1 y σ_2. Como se sabe, uno de esfuerzos principales es siempre nulo. Tratemos entonces de determinar pares de valores (σ_1, σ_2) para los cuales no se produce fluencia.

Si $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$, entonces $\tau_{máx} = \sigma_1 - 0 = \sigma_1$, de donde se concluye que, que no se produzca la falla por fluencia, debe cumplirse que $\sigma_2 \leq \sigma_1 < S_y$. región está representada por el cuadrado limitado por las rectas $\sigma_1 = 0$, σ_2 $\sigma_1 = S_y$ y $\sigma_2 = S_y$, tal como se muestra en la Fig. 4.7.

Si $\sigma_1 < 0$ y $\sigma_2 > 0$, entonces, a fin de que no se alcance la fluencia, d cumplirse que $\tau_{máx} = \sigma_2 - \sigma_1 < S_y$. Esta desigualdad, expresada como σ_2 · S_y, define la región triangular de la Fig. 4.7 limitada por las rectas $\sigma_1 = 0$, σ_2 y $\sigma_2 = \sigma_1 + S_y$.

Si $\sigma_1 \leq \sigma_2 < 0$, entonces $\tau_{máx} = 0 - \sigma_1 = -\sigma_1 < S_y$, de donde se concl que, para que no se produzca la falla por fluencia, debe cumplirse que σ_1 · $-S_y$. Esta región está representada por el cuadrado limitado por las rectas σ_1 $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = -S_y$ y $\sigma_2 = -S_y$, tal como se muestra en la Fig. 4.7.

Por último, si $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 < 0$, entonces, a fin de que no se alcanc fluencia, debe cumplirse que $\tau_{máx} = \sigma_1 - \sigma_2 < S_y$. Esta desigualdad, expres como σ_2 · σ_1 S_y, define la región triangular de la Fig. 4.7 limitada por rectas σ_1 0, σ_2 0 y σ_2 σ_1 S_y.

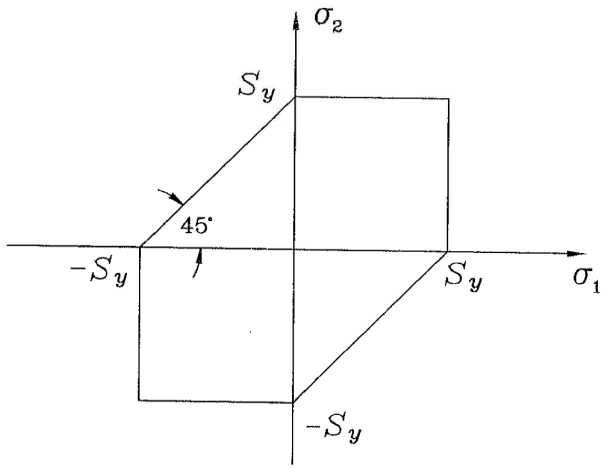


Figura 4.7 Representación gráfica de la teoría de Tresca

En conclusión, para que no se produzca fluencia los pares de esfuerzos principales (σ_1, σ_2) deben quedar contenidos en la región hexagonal definida en la Fig. 4.7, la cual puede ser construida muy fácilmente conociendo el límite de fluencia S_y del material.

Matemáticamente esta región está definida por el sistema de simultáneo de desigualdades

$$\begin{aligned} -S_y &< \sigma_1 < S_y \\ -S_y &< \sigma_2 < S_y \\ -S_y &< \sigma_2 - \sigma_1 < S_y \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.4 Teoría de von Mises

Esta teoría fue desarrollada inicialmente en forma independiente por M. T. Huber en Polonia en 1904 y por R. von Mises en Alemania en 1913, basándose ambos en el concepto de la energía de distorsión. Idénticos resultados fueron obtenidos posteriormente por A. Nadai en Alemania, en 1937, utilizando el esfuerzo cortante en un plano octaedral. Es por ello que esta teoría de von

Mises se le conoce como la *teoría de la energía de distorsión* o también como la *teoría del esfuerzo cortante octaedral.*

La teoría de von Mises se utiliza para predecir fallas por fluencia en materiales con comportamiento dúctil y arroja resultados que guardan una correlación mucho más estrecha con los valores obtenidos experimentalmente. Aparte de esto, la teoría de von Mises ha sido objeto de múltiples estudios, pudiendo formularse mediante cinco métodos diferentes.

Utilizando la metodología desarrollada por Nadai, la teoría establece que un material sometido a un estado general de esfuerzos fallará por fluencia cuando el esfuerzo cortante octaedral alcance un determinado valor, el cual corresponde al esfuerzo cortante octaedral que se genera en el ensayo de tracción cuando se llega al límite de fluencia.

Como el lector recordará del Cap. 1, un plano octaedral es aquel que forma ángulos iguales con los tres ejes principales. Aplicando entonces la fórmula de Cauchy, el esfuerzo de corte en un plano octaedral puede expresarse como

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2} \tag{4.5}$$

Dado que en un ensayo de tracción el estado de esfuerzos es uniaxial, los esfuerzos principales son $\sigma_3 = S_y$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ cuando se alcanza el límite de fluencia, tal como se indica en el diagrama de Mohr de la Fig. 4.6.

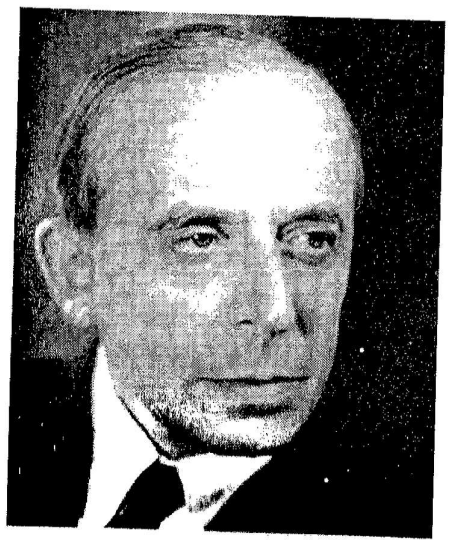


Figura 4.8 Richard von Mises[51] (1883-1953)

[51] Biografía en http://www.

Luego, el esfuerzo cortante octaedral de fluencia viene dado por

$$(\tau_{oct})_y = \frac{1}{3}\sqrt{(S_y-0)^2+(S_y-0)^2+(0-0)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}S_y$$

Entonces, para que el material no falle por fluencia se debe cumplir que

$$\tau_{oct} < \frac{\sqrt{2}}{3}S_y \tag{4.6}$$

O bien, utilizando la Ec. (4.5),

$$(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_3-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_1)^2 < 2S_y^2 \tag{4.7}$$

Para tener una visión gráfica de esta teoría, consideremos un estado plano de esfuerzos con esfuerzos principales σ_1 y σ_2 y tratemos de determinar los pares de valores (σ_1, σ_2) para los cuales no se produce fluencia. Como se sabe, en un estado plano de esfuerzos uno de los esfuerzos principales es siempre nulo. Entonces la Ec. (4.7) puede escribirse en este caso como

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2 < S_y^2 \tag{4.8}$$

Esta es la ecuación de una elipse en el plano $\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Para determinar los ejes principales de esta elipse y expresarla en su forma canónica, consideremos una sistema de coordenadas $\{\xi_1, \xi_2\}$ rotado en un ángulo θ con relación al sistema $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, como se muestra en la Fig. 4.9. Las ecuaciones de transformación entre ambos sistemas de coordenadas son

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \xi_1\cos\theta - \xi_2\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \sigma_2 &= \xi_1\,\mathrm{sen}\,\theta + \xi_2\cos\theta\end{aligned} \tag{4.9}$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (4.8) obtenemos

$$\xi_1^2(1-\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)+\xi_2^2(1+\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)+\xi_1\xi_2(\mathrm{sen}^2\theta-\cos^2\theta) < S_y^2 \tag{4.10}$$

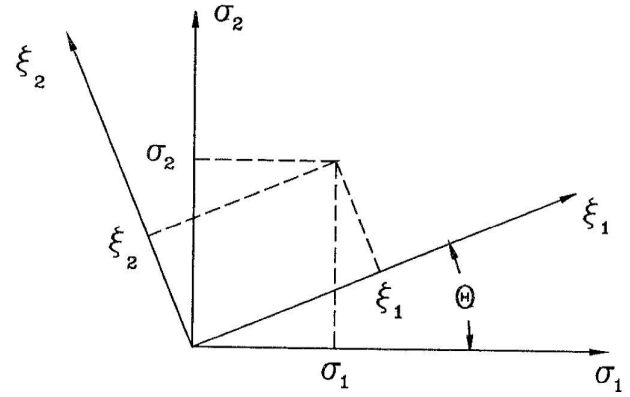


Figura 4.9 Transformación de coordenadas

El coeficiente del término $\xi_1\xi_2$ será nulo si, y solo si, $\theta = 45°$. Luego, para este valor del ángulo θ, la Ec. (4.10) puede escribirse como

$$\frac{\xi_1^2}{(\sqrt{2}\,S_y)^2}+\frac{\xi_2^2}{(\sqrt{2/3}\,S_y)^2} < 1 \tag{4.11}$$

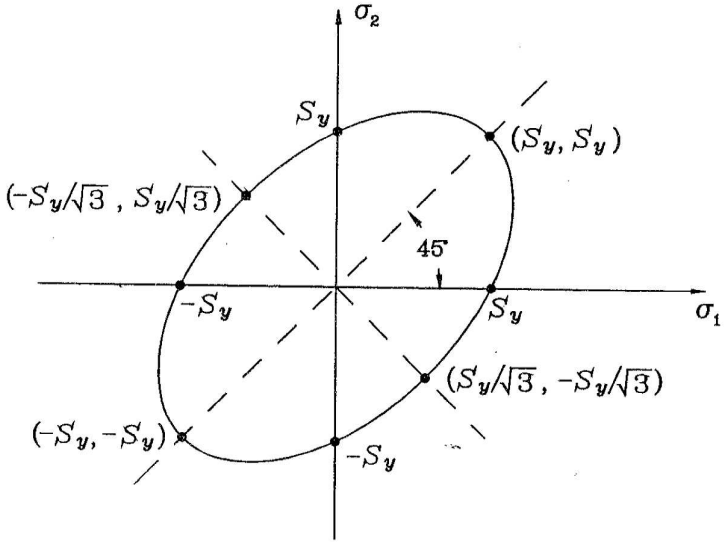
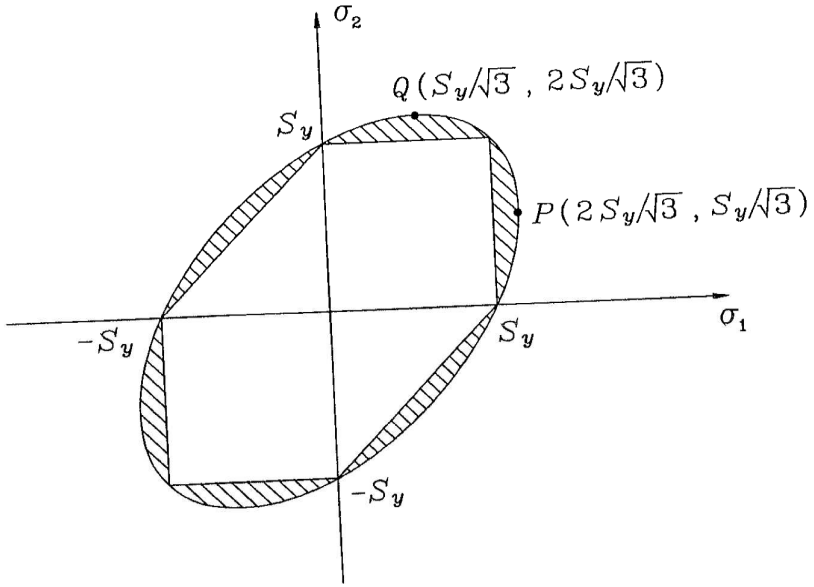


Figura 4.10 Representación gráfica de la teoría de von Mises

Observamos entonces que los ejes principales de la elipse forman un ángulo de 45° con el eje σ_1 y que los semiejes miden $\sqrt{2}\,S_y$ y $\sqrt{2/3}\,S_y$, respectivamente, como se observa en la Fig. 4.10. En la región interna delimitada por esta elipse, la cual puede ser construida muy fácilmente conociendo el límite de fluencia S_y del material, se ubican entonces los pares de esfuerzos principales (σ_1, σ_2) que no producen falla por fluencia.

En la Fig. 4.11 se muestran superpuestas, en coordenadas $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, las teorías de falla de Tresca y von Mises. Nótese que la teoría de Tresca es ligeramente más conservadora que la de von Mises. En efecto, si los esfuerzos principales en el punto más crítico de un sólido tienen valores de tal magnitud que el punto (σ_1, σ_2) se ubica en la zona rayada de esta figura, según la teoría de Tresca se habría superado ya la fluencia mientras que según la teoría de von Mises la misma estaría aún por alcanzarse. En los puntos P y Q de la Fig. 4.11, cuyas coordenadas pueden ser fácilmente determinadas por el lector, se produce la mayor discrepancia entre ambas teorías, la cual puede cuantificarse como

$$\text{máxima discrepancia} = \frac{2S_y/\sqrt{3} - S_y}{2S_y/\sqrt{3}} \times 100 = 13.4\ \%$$



...las teorías de Tresca y von Mises

4.5 Energía de Deformación

Las teorías de falla de Rankine y de Tresca fueron presentadas con cierta argumentación de tipo físico, mientras que la teoría de von Mises fue formulada, por razones de simplicidad, sin justificación alguna a través del esfuerzo cortante octaedral. Para poder entender los fundamentos de tipo físico que le dan sustento a esta teoría, que es justamente la que mejor correlación guarda con los resultados experimentales, se requiere definir el concepto de energía de deformación. De esta manera la teoría podrá ser deducida a través de la metodología que originalmente utilizó von Mises.

Para fijar ideas, consideremos una barra de longitud L y sección transversal A sometida a una carga axial P en uno de sus extremos. Supongamos que el otro extremos está fijo. Cuando se aplica la carga, su punto de aplicación se desplaza en una cantidad u, por lo que el trabajo realizado será

$$W = \int_0^u P\,du \tag{4.12}$$

Suponiendo que el eje x coincide con el eje de la barra, el esfuerzo axial será $\sigma_x = P/A$, mientras que la deformación longitudinal vendrá dada por $\varepsilon_x = u/L$. Utilizando las ecuaciones constitutivas estudiadas en el Cap. 3, tenemos que $\varepsilon_x = \sigma_x/E$, siendo E el módulo de elasticidad del material. Entonces

$$P = A\sigma_x = EA\varepsilon_x = \frac{EA}{L}\,u \tag{4.13}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (4.12) e integrando se tiene

$$W = \int_0^u P\,du = \int_0^u \frac{EA}{L}\,u\,du = \frac{1}{2}\frac{EA}{L}u^2 = \frac{1}{2}P\,u = \frac{1}{2}AL\sigma_x\varepsilon_x \tag{4.12}$$

El trabajo realizado por la carga externa se transforma en energía potencial interna denominada *energía de deformación*. Partiendo de la Ec. (4.12) podemos expresar esta energía de deformación por unidad de volumen como

$$U = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x \tag{4.13}$$

Extendiendo estas ideas al caso de un estado general de esfuerzos, la energía de deformación puede expresarse como

$$U=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz}) \tag{4.14}$$

En términos de los esfuerzos principales la energía de deformación viene dada por

$$U=\frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_2+\sigma_3\varepsilon_3) \tag{4.14}$$

Sustituyendo en esta ecuación las deformaciones principales mediante la aplicación de las ecuaciones constitutivas

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{E}-\frac{\nu}{E}(\sigma_2+\sigma_3)$$
$$\varepsilon_2=\frac{\sigma_2}{E}-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_3)$$
$$\varepsilon_3=\frac{\sigma_3}{E}-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)$$

se obtiene, después de algunas manipulaciones,

$$U=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right] \tag{4.15}$$

La deformación de un sólido puede visualizarse de manera conveniente como compuesta por un cambio de volumen más una distorsión pura. A tal fin descompongamos la matriz de esfuerzos σ en la forma $\sigma=\sigma^i+\sigma^d$, donde σ^i y σ^d son las llamadas componentes *isotrópica* y *desviadora* definidas por (ver problema 1.65 del Cap. 1)

$$\sigma^i=\begin{bmatrix}p & 0 & 0\\ 0 & p & 0\\ 0 & 0 & p\end{bmatrix},\qquad \sigma^d=\begin{bmatrix}\sigma_x-p & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-p & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-p\end{bmatrix}$$

donde

$$p=\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} \tag{4.16}$$

La componente isotrópica es responsable del cambio de volumen mientras que la componente desviadora solo produce distorsiones en el sólido. En efecto, como las deformaciones normales dependen únicamente de los esfuerzos normales, la dilatación volumétrica $\kappa=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ es proporcional al invariante $I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$. Entonces, para la componente isotrópica de la matriz de esfuerzos se tiene que $I_1=3p=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$, mientras que para la desviadora el invariante es $I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z-3p\equiv 0$.

La energía de deformación puede entonces ser descompuesta en la forma

$$U=U_i+U_d \tag{4.17}$$

donde U_i es la energía isotrópica o volumétrica y U_d es la energía desviadora o de distorsión.

De la Ec. (4.15) se tiene que la energía isotrópica es

$$U_i=\frac{1}{2E}\left[3p^2-2\nu(3p^2)\right]=\frac{3(1-2\nu)}{2E}p^2$$

Esto es

$$U_i=\frac{1-2\nu}{6E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right] \tag{4.18}$$

La energía de distorsión, por otra parte, puede determinarse como la diferencia entre la energía de deformación total y la energía isotrópica. En efecto, utilizando las Ecs. (4.17), (4.15) y (4.18) tenemos que

$$U_d=U-U_i$$
$$=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right]$$
$$-\frac{1-2\nu}{6E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)\right]$$

Después de realizar de algunas manipulaciones algebraicas llegamos a la siguiente expresión para la energía de distorsión

$$U_d=\frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_1)^2+(\sigma_3-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_1)^2\right] \tag{4.19}$$

La teoría de von Mises se basa justamente en la postulación de que la fluencia, que es un fenómeno asociado a la presencia de esfuerzos cortantes elevados, se produce cuando la energía de distorsión U_d se hace igual a un determinado valor límite, el cual se determina como la energía de distorsión correspondiente a la fluencia en el ensayo de tracción.

Dado que en un ensayo de tracción el estado de esfuerzos es uniaxial, los esfuerzos principales son $\sigma_3 = S_y$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ cuando se alcanza el límite de fluencia, tal como se indica en el diagrama de Mohr de la Fig. 4.5. Luego, la energía de distorsión de fluencia viene dada por

$$(U_d)_y = \frac{1+\nu}{6E}\left[(S_y - 0)^2 + (S_y - 0)^2 + (0-0)^2\right] = \frac{1+\nu}{3E}S_y^2$$

Entonces, para que el material no falle por fluencia se debe cumplir que

$$U_d < \frac{1+\nu}{3E}S_y^2 \tag{4.20}$$

O bien, utilizando la Ec. (4.19),

$$(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 < 2S_y^2 \tag{4.21}$$

Como puede observarse, esta expresión es idéntica a la Ec. (4.7) que se dedujo al utilizar como criterio el esfuerzo cortante octaedral.

4.6 Intensidad del Esfuerzo

Para determinar los puntos más críticos de un sólido sometido a esfuerzos puede resultar sumamente conveniente asignarle a cada punto un índice que sirva de indicador para juzgar de manera comparativa los distintos niveles de solicitación. Hacerlo directamente con la matriz de esfuerzos resultaría prácticamente imposible. En el caso de los materiales con comportamiento dúctil, las teorías de falla pueden ser utilizadas con este fin.

Consideremos entonces un punto de un sólido en el cual existe un estado general de esfuerzos definido por la matriz σ. Sean σ_1, σ_2 y σ_3 los esfuerzos principales. El esfuerzo cortante máximo viene dado por

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \tag{4.22}$$

mientras que la energía de distorsión es

$$U_d = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2\right] \tag{4.23}$$

Consideremos ahora un estado de esfuerzos imaginario en el cual existe únicamente un esfuerzo normal σ_i. Para este estado de esfuerzos imaginario el esfuerzo cortante máximo y la energía de distorsión vienen dados por

$$(\tau_{máx})_i = \frac{\sigma_i}{2} \tag{4.24}$$

$$(U_d)_i = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_i^2 \tag{4.25}$$

Basándonos en la teoría de Tresca podríamos establecer que dos estados de esfuerzos distintos son equivalentes si el esfuerzo de corte máximo en ambos es idéntico. Comparando entonces la Ec. (4.22) con la (4.24) concluimos que el esfuerzo normal σ_i viene dado por

$$\sigma_i = \sigma_3 - \sigma_1 \tag{4.26}$$

Nótese que ambos estados de esfuerzos, el real y el imaginario, son equivalentes pues, según la teoría de Tresca, la fluencia se producirá en ellos al mismo tiempo. Al esfuerzo σ_i se le llama esfuerzo normal equivalente o *intensidad del esfuerzo* en el punto en consideración. Si se utiliza la Ec. (4.26) para determinarlo, entonces recibe el nombre de *esfuerzo de Tresca.*

De igual manera, si nos basamos ahora en la teoría de von Mises, podríamos establecer que dos estados de esfuerzos distintos son equivalentes si la energía de distorsión en ambos es idéntica. Comparando entonces la Ec. (4.23) con la (4.25) concluimos que la intensidad del esfuerzo σ_i en este caso viene dada por

$$\sigma_i \quad \sqrt{\frac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}{2}} \tag{4.27}$$

A este esfuerzo se le da el nombre de *esfuerzo de von Mises*.

Los esfuerzos de Tresca y de von Mises sirven como indicadores del nivel de solicitaciones en un punto determinado. Si la matriz de esfuerzos se ha determinado para cada punto de un sólido, entonces se pueden calcular de manera automática los esfuerzos principales y el esfuerzo de Tresca o el de von Mises para cada punto. Aquellos puntos donde estos esfuerzos sean más altos serán los puntos críticos en los cuales probablemente se iniciará la falla por fluencia. Dado que la intensidad del esfuerzo es un esfuerzo normal equivalente, para saber si ello ocurrirá bastará con comparar su valor con el límite de fluencia S_y del material, lo cual, a todas luces, resulta sumamente práctico y conveniente.

4.7 Factor de Seguridad

En el estudio que hemos presentado de las diversas teorías de falla se ha utilizado el límite de fluencia S_y o la resistencia última S_u como valores límite de la resistencia del material. Sin embargo, en el cálculo de elementos mecánicos y estructurales se utiliza generalmente un nivel de esfuerzos inferior denominado *esfuerzo admisible* S_{adm}. Las razones son varias:

a) En la determinación de la magnitud de las cargas que actúan sobre un componente mecánico o estructural existe generalmente una gran incertidumbre. Supongamos, por ejemplo, que se desea determinar cuántas guayas de un determinado diámetro se requieren para un ascensor de un edificio residencial. Después de un estudio estándar de tráfico se determinó que el edificio debe contar con dos ascensores con una capacidad de 6 pasajeros cada uno. Al instante surgen las siguientes preguntas: ¿Qué peso promedio establecemos para cada pasajero? ¿Y cuál sería la situación en el caso de una mudanza? ¿Cuánto pesan los artefactos y muebles que deberá elevar el ascensor en cada viaje? De acuerdo con las normas internacionales que al respecto se han elaborado, el peso promedio de cada pasajero debe estimarse en 75 kgf, por lo que el referido ascensor deberá diseñarse para una capacidad de 450 kgf. Sin embargo, esta es una suposición de carácter normativo, pero las guayas del ascensor, por razones de seguridad, deberán calcularse para una capacidad algo mayor.

En otros casos la situación puede ser aún más incierta. Por ejemplo, ¿Cuál es la carga dinámica que actúa sobre la punta de eje de un vehículo cuando el neumático cae en un inadvertido desnivel del pavimento? ¿Cuánto pesa el equipaje de los pasajeros en un avión? ¿Cuántas personas habitarán en una

determinada edificación? ¿Cuál es el peso del mobiliario? ¿Y cuál será la magnitud de las cargas sísmicas sobre un edificio durante un terremoto?

b) Aún cuando en determinadas circunstancias se tuviese la capacidad de estimar las cargas con suficiente precisión, los elementos mecánicos y estructurales pueden eventualmente ser sometidos a sobrecargas imprevistas debido a efectos accidentales o al desconocimiento del usuario. Volviendo al ejemplo de ascensor, su capacidad puede ser superada porque en un momento dado el peso total de los pasajeros sea superior a los 450 kgf establecidos, o bien porque inadvertidamente el número de pasajeros que aborde el ascensor sea superior a 6.

c) El cálculo exacto de los esfuerzos a los que está sometido un sólido es factible en contadísimos casos. A pesar de los métodos computacionales modernos que se tienen a disposición hoy en día, la determinación de la distribución de esfuerzos en un sólido tiene siempre un carácter aproximado debido a las hipótesis simplificadoras que se utilizan con el fin de lograr una formulación matemática relativamente simple.

d) Los valores que se tienen para las propiedades mecánicas del material con el cual será diseñado y construido un determinado componente no siempre reflejan la realidad. Los valores que se obtienen para estas propiedades en los ensayos de tracción muestran siempre una cierta dispersión, de manera que no todos los componentes que se fabriquen tendrán la misma resistencia. Los materiales, además, distan mucho de ser homogéneos, mostrando más bien una gran cantidad de defectos que no pueden ser tomados en cuenta en forma determinística en su diseño.

Por estas y otras razones definimos un *esfuerzo admisible* S_{adm} como

$$S_{adm} = \frac{S_{falla}}{N} \tag{4.28}$$

donde S_{falla} es el límite de fluencia S_y o la resistencia última S_u según se trate de un material con comportamiento dúctil o frágil, respectivamente. El factor N se denomina *factor de seguridad* y depende, además de una estimación del efecto de las circunstancias discutidas anteriormente, de las posibles consecuencias que pueda traer consigo la falla. Cuando ésta pueda ocasionar la pérdida de vidas humanas, generalmente existe una reglamentación de obligatorio cumplimiento por parte del ingeniero calculista, la cual establece las cargas a ser consideradas, la manera según la cual deben estimarse y los factores de seguridad a emplear en el diseño.

En el caso de las edificaciones civiles los factores de seguridad oscilan entre 1.5 y 2.5, habida cuenta de que, además, existen generalmente otras

sobre-estimaciones implícitas en la determinación de las cargas de diseño. En los equipos de las instalaciones industriales, tales como calderas, recipientes a presión, hornos, torres de procesos químicos, tuberías, etc., los factores varían entre 1.5 y 3, existiendo un menor grado de incertidumbre en la estimación de las cargas pero una mayor probabilidad de sobrecargas accidentales. Por último, en el diseño de componentes que estarán sometidos a cargas de impacto, los factores de seguridad pueden llegar a valer tanto como 10 o 12.

Ejemplo 4.1

Supongamos que en el punto más crítico de una pieza de acero existe un estado plano de esfuerzos definido por

$$\sigma_x = 10 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_y = 4 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{xy} = 4 \text{ kgf/mm}^2$$

Si el material tiene un límite de fluencia de 36 kgf/mm^2, determine el factor de seguridad con el cual fue calculada la pieza suponiendo que se utilizó:

a) La teoría de Tresca.
b) La teoría de von Mises.

Solución: Los esfuerzos principales en el plano *xy* vienen dados, de acuerdo con la Ec. (1.70) del Cap. 1, por

$$\sigma^*_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2_{xy}}$$
$$= \frac{1}{2}(10+4) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(10-4)^2 + 4^2}$$
$$= (7 \pm 5) \text{ kgf/mm}^2$$

Como el estado de esfuerzos es plano, entonces $\sigma_3 = 12$ kgf/mm^2, $\sigma_2 = 2$ kgf/mm^2 y $\sigma_1 = 0$ kgf/mm^2.

Si aplicamos la teoría de Tresca, tenemos que

$$\sigma_3 - \sigma_1 < \frac{S_y}{N}$$

Luego

$$N = \frac{S_y}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{36}{12-0} = 3$$

De igual manera, si aplicamos la teoría de von Mises tenemos

$$(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 < 2(S_y / N)^2$$

Luego

$$N = \frac{\sqrt{2}\, S_y}{\sqrt{(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\, 36}{\sqrt{(12-0)^2 + (12-2)^2 + (2-0)^2}} = 3.2$$

Se deje como ejercicio al lector justificar de manera conceptual es diferencia en el cálculo del factor de seguridad.

Ejemplo 4.2

a) Bajo la acción de una carga *F* desconocida se comprime un cilindro aluminio de 100 mm de longitud en el interior de una cavidad cilíndri infinitamente rígida, tal como se muestra en la Fig. 4.12. Si el límite de fluenc del aluminio es 300 MPa, determine la máxima variación de longitud que pue experimentar el cilindro sin que el material falle por fluencia utilizando teoría de Tresca.

b) Si el cilindro fuese de acero con un límite de fluencia igual al d aluminio y experimentase la misma variación de longitud que en el ca anterior, ¿Fallaría el cilindro? ¿Cuál sería la variación de longitud admisible este caso?

c) Si el cilindro fuese ahora de fundición gris con una resistencia a tracción de 120 MPa y a la compresión de 300 MPa y experimentase la misn variación de longitud que en el caso del aluminio, ¿Fallaría la fundición? ¿Cu sería la variación de longitud admisible?

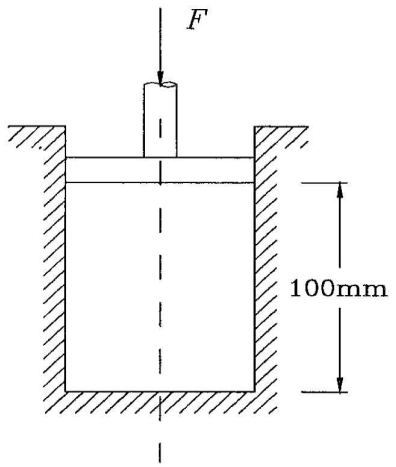


Figura 4.12

Solución: Consideremos un sistemas de coordenadas con una orientación tal que el eje z coincide con la dirección de aplicación de la carga, mientras que los ejes x y y están orientados en las direcciones radiales del cilindro. Sea σ_z el esfuerzo en la dirección de la carga axial y sean $\sigma_x = \sigma_y$ los esfuerzos en las direcciones radiales, los cuales son idénticos por la simetría del problema.

Como las fuerzas de fricción no van a ser tomadas en cuenta en el análisis, entonces $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, razón por la cual podemos concluir de una vez que los ejes x, y y z son principales y que, por lo tanto, $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Sea $\varepsilon_z = -\Delta L/L$ la deformación axial del cilindro, siendo $L = 100$ mm su longitud inicial y ΔL su variación de longitud. Como las paredes de la cavidad son infinitamente rígidas, entonces $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$.

Aplicando ahora las ecuaciones constitutivas (3.25), pág. 275, tenemos

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\Delta L}{L}$$

Como $\sigma_x = \sigma_y$, entonces

$$\begin{cases} (1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_z = 0 \\ -2\nu\sigma_x + \sigma_z = -\dfrac{E\Delta L}{L} \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para σ_x y σ_z obtenemos

$$\sigma_x = -\frac{\nu E\Delta L}{(1-\nu-2\nu^2)L}, \qquad \sigma_z = -\frac{(1-\nu)E\Delta L}{(1-\nu-2\nu^2)L} \tag{a}$$

Como para todo material se cumple que $\nu < 0.5$, entonces $\sigma_x > \sigma_z$ y los esfuerzos principales son

$$\sigma_1 = -\frac{(1-\nu)E\Delta L}{(1-\nu-2\nu^2)L}, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{\nu E\Delta L}{(1-\nu-2\nu^2)L} \tag{b}$$

a) En el caso del aluminio tenemos que, usando la teoría de Tresca,

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \frac{(1-2\nu)E\Delta L}{(1-\nu-2\nu^2)L} < S_y$$

Luego

$$\Delta L < \frac{(1-\nu-2\nu^2)LS_y}{(1-2\nu)E} \tag{c}$$

Utilizando las propiedades elásticas del aluminio $E = 70$ GPa y $\nu = 0.33$ que se listan en la Tabla 3.1, pág. 253, tenemos que la máxima variación de longitud que puede experimentar el cilindro sería $\Delta L = 0.57$ mm.

b) Si se le aplica al acero esta deformación, los esfuerzos principales pueden ser calculados de acuerdo con las Ecs. (b). Usando entonces los valores $E = 205$ GPa y $\nu = 0.30$ (ver Tabla 3.1), obtenemos que $\sigma_1 = -1573$ MPa y $\sigma_2 = \sigma_3 = -674$ MPa. Entonces, aplicando la teoría de Tresca tenemos que

$$\sigma_3 - \sigma_1 = 899 \text{ MPa} > 300 \text{ MPa}$$

y el cilindro de acero fallaría por fluencia. Para que no falle, la máxima variación de longitud que puede experimentar sería, utilizando la Ec. (c), $\Delta L = 0.19$ mm.

c) Los esfuerzos principales para el cilindro de fundición gris serían, utilizando los valores $E = 75$ GPa y $\nu = 0.22$ de la Tabla 3.1, $\sigma_1 = -488$ MPa y $\sigma_2 = \sigma_3 = -138$ MPa. Entonces, aplicando la teoría de Rankine tenemos que

$$|\sigma_1| = 488 \text{ MPa} > 300 \text{ MPa}$$

y el cilindro fallaría por fractura. Para que no falle, el máximo esfuerzo compresivo debe ser menor que la resistencia a la compresión. Entonces

$$|\sigma_1| = \frac{(1-\nu)E\Delta L}{(1-\nu-2\nu^2)L} < S_{uc}$$

Luego

$$\Delta L < \frac{(1-\nu-2\nu^2)LS_{uc}}{(1-\nu)E} = 0.350 \text{ mm}$$

Problemas

4.1 El estado de esfuerzos en el punto más solicitado de un elemento de máquina está definido por

$$\sigma_x = -10 \text{ kgf/cm}^2$$
$$\sigma_y = -20 \text{ kgf/cm}^2$$
$$\sigma_z = -5 \text{ kgf/cm}^2$$
$$\tau_{xy} = -10 \text{ kgf/cm}^2$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Sabiendo que el esfuerzo admisible es 25 kgf/cm^2, verifique la resistencia del elemento utilizando la teoría de Tresca.

4.2 El estado de esfuerzos en el punto más crítico sobre la superficie de una pieza está definido por

$$\sigma_x = 14 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\sigma_y = 20 \text{ kgf/mm}^2$$
$$\tau_{xy} = -10 \text{ kgf/mm}^2$$

¿Qué valor debe tener el límite de fluencia para que el material no falle? Utilice la teoría de von Mises y considere que el estado de esfuerzos es plano.

4.3 En el punto más solicitado de una pieza de acero se conoce únicamente el esfuerzo normal sobre un plano y se sabe que es un esfuerzo principal cuyo valor es -40 kgf/mm^2. Si el límite de fluencia es 30 kgf/mm^2, ¿Se puede afirmar con estos únicos datos que el material fallará por fluencia?

4.4 En el punto más solicitado de un elemento de máquina existe un estado de deformaciones como el mostrado en la Fig. P.4.4. Si el material es un acero para el cual se ha establecido un esfuerzo admisible de 300 MPa, se desea saber si la pieza fallará o no por fluencia sabiendo que el estado de esfuerzos es plano.

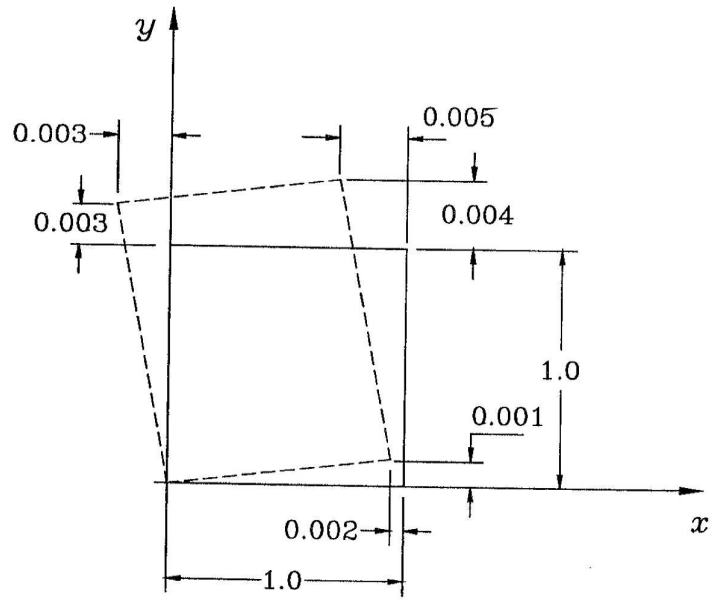


Figura P.4.4

4.5 Verificar la resistencia del elemento de máquina del problema 3.6 del Cap. 3 teniendo presente que el límite de fluencia es 30 kgf/mm^2 y que el factor de seguridad es 2.

4.6 En el punto más solicitado de una pieza existe el siguiente estado de plano de esfuerzos

$$\sigma_x = 1000\,\text{kgf/cm}^2$$
$$\sigma_y = 1000\,\text{kgf/cm}^2$$
$$\tau_{xy} = 500\,\text{kgf/cm}^2$$

Se sabe que si las magnitudes de σ_x y σ_y se duplican, manteniendo constante el valor de τ_{xy}, el material falla. Si el esfuerzo σ_y se vuelve compresivo con una magnitud de 500 kgf/cm^2 mientras que τ_{xy} se mantiene constante, determine el valor del esfuerzo σ_x para que el cual se produce la falla por fluencia. Utilice la teoría de Tresca.

4.7 Un cubo de 20 mm de lado, colocado dentro de un canal infinitamente rígido, se encuentra sometido a la acción de un esfuerzo normal de compresión σ uniformemente distribuido como se muestra en la Fig. P.4.7. Si el límite de fluencia del material es 270 MPa y el módulo de Poisson es 0.255, calcule el máximo valor que puede tomar σ para que el material no falle. Utilice la teoría de von Mises.

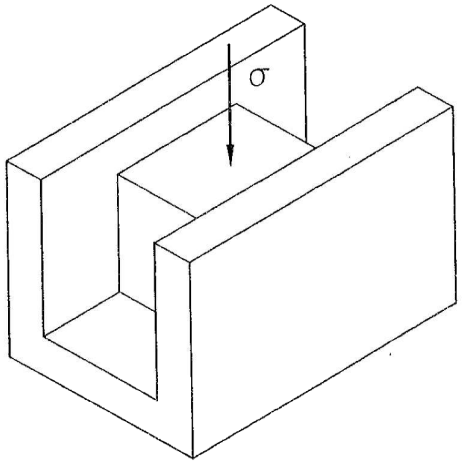


Figura P.4.7

4.8 En el punto crítico de una pieza construida con un material que tiene un límite de fluencia S_y existe un estado de corte puro como el mostrado en la Fig. P.4.8. Determine el máximo valor que puede tener el esfuerzo de corte τ para que no se produzca falla por fluencia de acuerdo con: a) La teoría de Tresca; b) La teoría de von Mises.

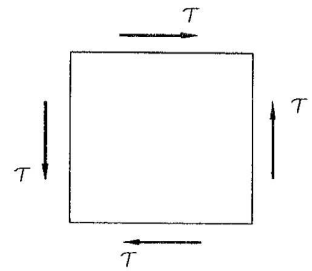


Figura P.4.8

4.9 En el punto más crítico de un elemento de máquina se sabe que el estad de esfuerzos es plano, habiéndose determinado los esfuerzos

$$\sigma_{x1} = -20\ \text{MPa}$$
$$\sigma_{x2} = 20\ \text{MPa}$$
$$\tau_{x2x3} = 40\ \text{MPa}$$

referidos a los ejes x_1, x_2 y x_3, como se muestra en la Fig. P.4.9. Sabiend que la pieza será fabricada con un acero dúctil de límite de fluenci 200 MPa y que el factor de seguridad es 2.5, calcule los esfuerzos d Tresca y de von Mises para determinar si el elemento fallará po fluencia.

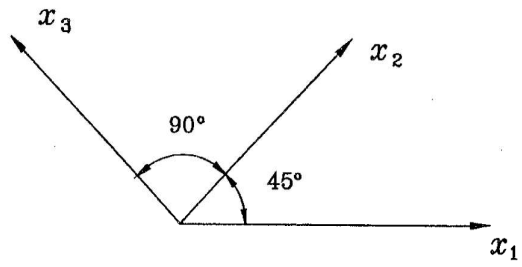


Figura P.4.9

4.10 Como una nueva teoría de falla se propone que dos estados de esfuerzo son equivalentes si la magnitud del vector esfuerzo en el plano dond actúa el esfuerzo de corte máximo es idéntica para ambos estados d solicitaciones.

a) Determine la intensidad del esfuerzo σ_i en función de los esfuerzo principales según esta nueva teoría.

b) Calcule esta intensidad del esfuerzo para un estado de solicitaciones en el cual los esfuerzos principales son $\sigma_1 = -100$ MPa, $\sigma_2 = 0$ MPa y $\sigma_3 = 100$ MPa y compárelo con los esfuerzos de Tresca y de von Mises.

c) ¿Recomendaría usted el uso de esta teoría?

4.11 Con el fin de determinar el estado de esfuerzos en un punto de la superficie de una pieza, se trazó un cuadrado pequeño de 5 mm de lado alrededor de dicho punto. Cuando la pieza fue instalada y sometida al sistema de cargas que deberá soportar en su funcionamiento habitual, el cuadrado se deformó como se muestra en la Fig. P.4.11 con líneas de trazos. Al medir las longitudes finales de los cuatro lados del cuadrado se encontró que $A'B' = C'D' = 5.002$ mm, $A'C' = B'D' = 5.001$ mm, mientras que el ángulo final entre los lados $A'B'$ y $A'C'$ resultó ser $B'A'C' = 89.96°$. Utilizando la teoría de Tresca y sabiendo que el estado de esfuerzos es plano, determine el límite de fluencia mínimo S_y que debe tener el material para que la pieza no falle. Las propiedades elásticas del material son $E = 2 \times 10^6$ kgf/cm^2 y $\nu = 0.3$.

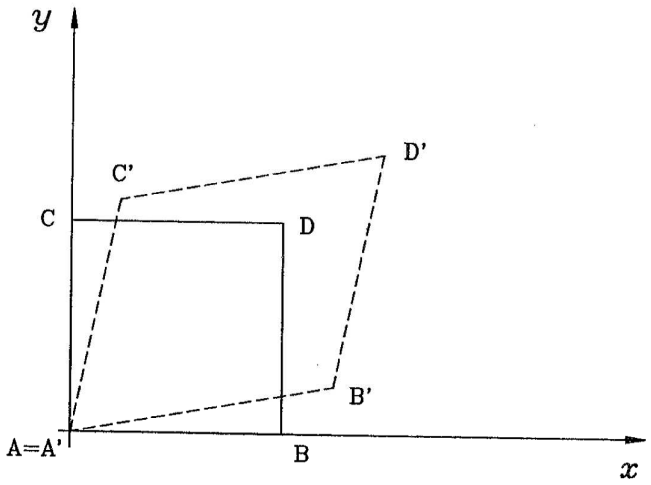


Figura P.4.11

4.12 El estado de deformaciones en la zona más crítica de la superficie de una pieza es como la que se muestra en la Fig. P.4.12. Como se trata de la superficie de una pieza, se sabe que el estado de esfuerzos es plano.

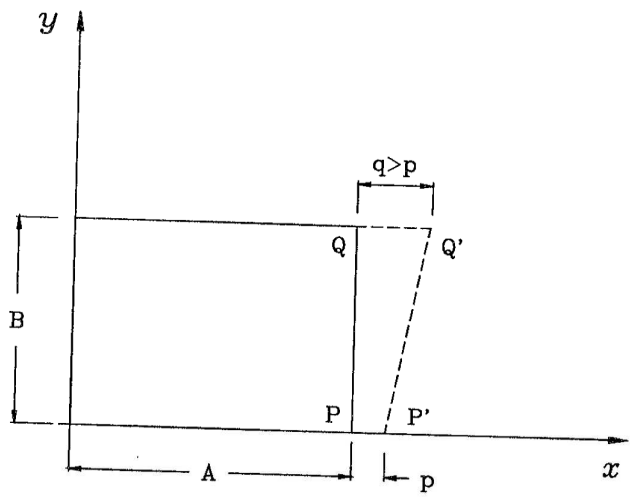


Figura P.4.12

a) Evalúe el campo de deformaciones en la región $0 \le x \le A$, $0 \le y \le B$ en función de A, B, p y q y determine el punto más crítico dentro de esta región.

b) Determine la matriz de esfuerzos en el punto crítico encontrado en (a) en función de A, B, p, q, del módulo de elasticidad E y del módulo de Poisson ν.

c) Suponiendo que $E = 30 \times 10^6$ psi, $\nu = 1/3$, $q = 2p = A/1000$ y $A = 2B$, determine el valor mínimo que debe tener el límite de fluencia S_y del material para que la pieza no falle. Utilice la teoría de Tresca.

4.13 El cilindro de aluminio de 150 mm de diámetro por 250 mm de altura mostrado en la Fig. P.4.13 se comprime mediante un troquel que le transmite una presión uniforme sobre su cara superior. Como se observa, entre el cilindro y la matriz existe una holgura de 0.01 mm. Considerando que la matriz es infinitamente rígida comparada con el aluminio y despreciando las fuerzas de fricción, determine la presión máxima que puede ser aplicada por el troquel sin que el cilindro falle por fluencia. El aluminio tiene un módulo de elasticidad $E = 70$ GPa, un módulo de Poisson $\nu = 1/3$ y un límite de fluencia $S_y = 240$ MPa. Utilice la teoría de Tresca.

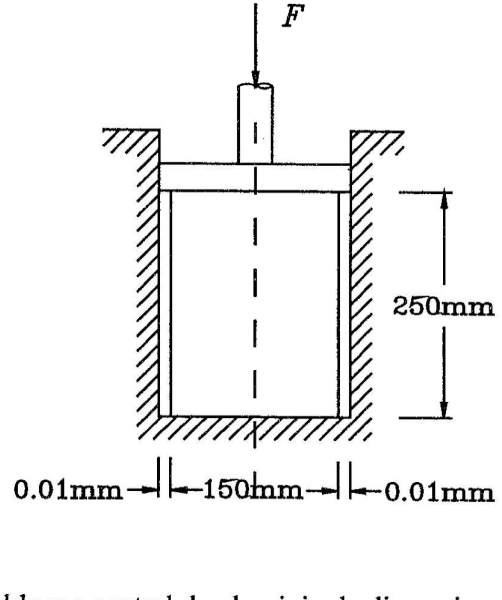


Figura P.4.13

4.14 El bloque central de aluminio de dimensiones $a \times b \times c$ mostrado en la Fig. P.4.14 es comprimido entre otros dos bloques laterales del mismo material y dimensiones $d \times b \times e$ mediante un troquel que le transmite una presión uniforme $\sigma_z = -p$ sobre su cara superior. Considerando que la matriz es infinitamente rígida comparada con el aluminio y que ambos bloques pueden expandirse libremente en la dirección x, determine la presión máxima p que puede ser aplicada por el troquel de manera que ninguno de los bloques falle por fluencia. Desestime las fuerzas de fricción y utilice la teoría de von Mises considerando un módulo de elasticidad $E = 70$ GPa, un módulo de Poisson $\nu = 1/3$ y un límite de fluencia $S_y = 240$ MPa. Las dimensiones de los bloques son $a = 80$ mm, $b = 90$ mm, $c = 60$ mm, $d = 20$ mm y $e = 55$ mm.

4.15 Bajo la acción de un estado de cargas, una pieza falla cuando en el punto más crítico se genera un estado de esfuerzos donde la única componente no nula es $\tau_{xy} = -150$ MPa. Bajo otro estado de cargas en el mismo punto, se genera un estado de esfuerzos donde las únicas componentes no nulas son $\sigma_x = 150$ MPa y $\sigma_y = \sigma \geq 0$, donde σ se desconoce. Determine el máximo valor de σ para que la pieza no falle si: a) El material es dúctil y b) El material es frágil.

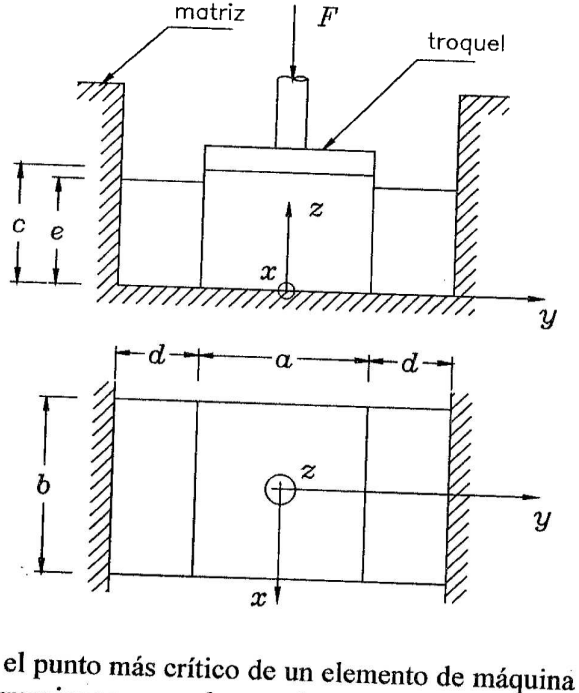


Figura P.4.14

4.16 Para el punto más crítico de un elemento de máquina se encontró que l deformaciones normales en las tres direcciones mostradas en la Fi P.4.16 son

$$\varepsilon_a = 6.5\times10^{-4}, \qquad \varepsilon_b = -3.5\times10^{-4}, \qquad \varepsilon_c = 3\times10^{-4}$$

Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano y que $E = 2.1\times10^6$ kgf/cr y $\nu = 0.25$, determine cuál debe ser el límite de fluencia mínimo d material para que la pieza no falle. Utilice la teoría de von Mises con u factor de seguridad de 2.5.

4.17 En todos los puntos localizados sobre la superficie exterior de u recipiente cilíndrico que contiene un gas a una determinada presión, e estado de esfuerzos es el mismo. Dicho estado de esfuerzos est caracterizado por la existencia de un esfuerzo normal de tracción en l dirección circunferencial (ortogonal a la generatriz del cilindro) qu designaremos como σ_t, y otro esfuerzo normal, también de tracción actuando en la dirección axial (paralelo a la generatriz del cilindro), c cual llamaremos σ_a. De la teoría de recipientes a presión se sabe que e esfuerzo circunferencial es el doble del esfuerzo axial, que ambos son función de la presión manométrica del gas contenido en el cilindro y qu no existen esfuerzos cortantes asociados a las direcciones indicadas Sabiendo que el acero utilizado en la construcción del recipiente tiene u

límite de fluencia de 250 MPa y que para una presión interna manométrica de 10 MPa el material del recipiente llega a fluencia, determine el valor de la deformación normal en una dirección que forma 45° con la generatriz de la superficie cilíndrica justo en el momento para el cual se alcanza la fluencia. Utilice las teorías de Tresca y von Mises y considere para el acero un módulo de elasticidad de 200 GPa y un módulo de Poisson de 1/3.

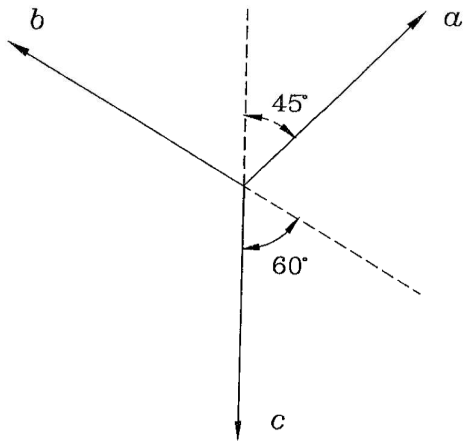


Figura P.4.16

4.18 En un punto A de un material de una pieza se produce la falla por fluencia cuando en él se genera un esfuerzo uniaxial de compresión de −100 MPa, mientras que en otro punto B de la misma pieza se alcanza la fluencia cuando en él se genera un esfuerzo uniaxial de tensión de 100 MPa. Determine el límite de fluencia del material.

4.19 En el punto más solicitado de un componente estructural, fabricado con un acero cuyo límite de fluencia es 200 MPa, se conocen los esfuerzos indicados en la Fig. P.4.19. Sabiendo que el estado de esfuerzos es plano y que $\tau > 0$, determine el valor máximo que puede tomar el esfuerzo de corte τ de manera que el componente no falle por fluencia. Utilice la teoría de Tresca..

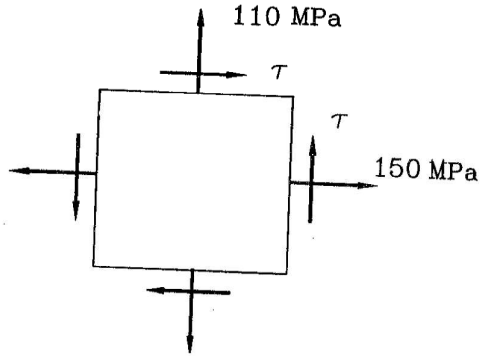


Figura P.4.19

4.20 Sobre la superficie de una pieza se trazó el triángulo ABC mostrado en la Fig.P.4.20. Cuando la pieza se sometió a un determinado sistema de cargas, los vértices A, B y C se desplazaron a unas nuevas posiciones A', B' y C'. Al medir estos desplazamientos, se determinó que el vértice A se desplazó hacia la derecha 0.1 mm, el vértice B se desplazó 0.2 mm hacia la derecha y 0.3 mm hacia arriba, mientras que el vértice C se desplazó 0.3 mm hacia la izquierda y 0.2 mm hacia abajo. Utilice la teoría de Tresca para verificar la resistencia de la pieza sabiendo que está fabricada con un aluminio de módulo de elasticidad $E = 7200$ kgf/mm^2, módulo de Poisson $\nu = 0.3$ y límite de fluencia $S_y = 30$ kgf/mm^2. Suponga que el campo de deformaciones en la zona ocupada por el triángulo es uniforme y que el estado de esfuerzos es plano.

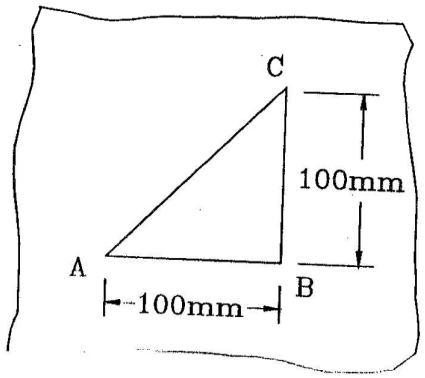


Figura P.4.20

4.21 En el punto más crítico de una pieza construida con un material de naturaleza frágil existe un estado uniaxial de esfuerzos como el mostrado en la Fig. P.4.21. Determine el ángulo α que define la orientación del plano AB en el cual se generará la fractura del material.

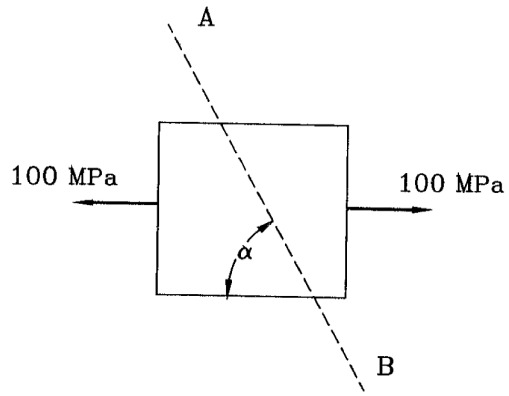


Figura P.4.21

4.22 Si en el problema anterior el material es de naturaleza dúctil, ¿Cuál será el valor del ángulo α?

4.23 Bajo la acción de un cierto estado de cargas, una pieza falla cuando en el punto más crítico se genera un estado de esfuerzos como el mostrado en la Fig. P.4.23a. Si el estado de cargas cambia de manera que ahora el estado de esfuerzos es como se indica en la Fig. P.4.23b, determine el máximo valor del esfuerzo cortante τ para que la pieza no falle si:

a) El material es de naturaleza dúctil;
b) El material es de naturaleza frágil.

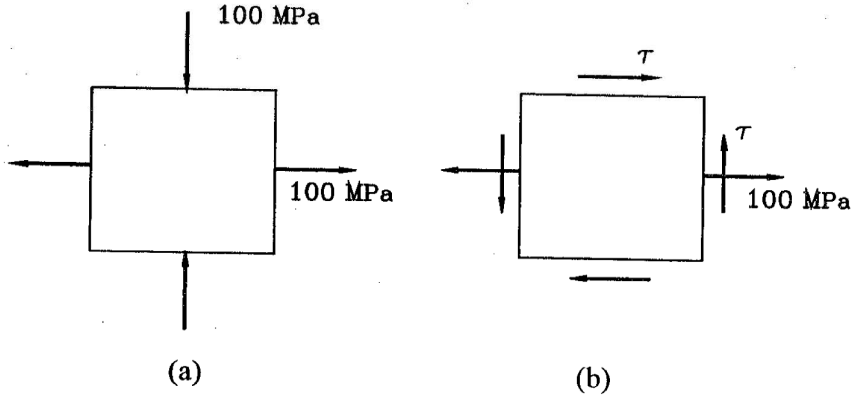


Figura P.4.23

4.24 En la Fig. P.4.24 se muestran dos bloques de titanio de dimensiones $a \times b \times c$. Al bloque de la derecha se le aplica una fuerza F a través de un troquel que le transmite una presión uniforme $\sigma_z = -p$ sobre su cara superior. Suponiendo que la matriz es infinitamente rígida comparada con el titanio y despreciando las fuerzas de fricción:

a) Determine la fuerza F que debe aplicársele al troquel para eliminar la holgura lateral h, considerando en su análisis que ambos bloques pueden expandirse libremente en la dirección x.
b) Para la condición anterior, verifique la resistencia del bloque de la derecha utilizando la teoría de von Mises.
c) Si el bloque de la derecha no falla en estas condiciones, entonces la fuerza F determinada en (a) puede seguir incrementándose. Evalúe entonces cuál es el valor máximo de la fuerza F que puede aplicarse sin que se produzca la falla de ninguno de los dos bloques utilizando también la teoría de von Mises.

Las dimensiones de los bloques son $a = 80$ mm, $b = 60$ mm y $c = 70$ mm. La holgura lateral es $h = 0.06$ mm. El módulo de elasticidad del titanio es $E = 110$ GPa, su módulo de Poisson es $\nu = 0.33$ y su límite de fluencia es $S_y = 380$ MPa.

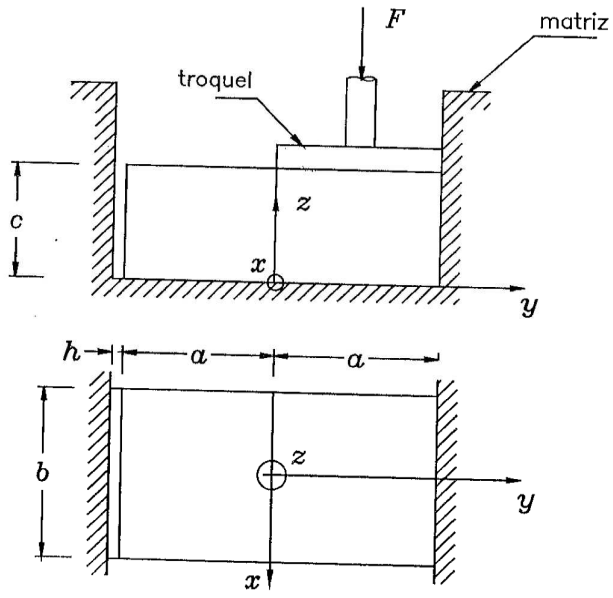


Figura P.4.24

Capítulo 5

Formulación de Problemas

5.1 Introducción

Ahora que se han presentado ya todos los conceptos fundamentales y se han deducido las ecuaciones correspondientes, estamos en capacidad de proceder a formular el problema general del análisis de esfuerzos en un sólido lineal, elástico e isótropo.

En términos generales, un problema de análisis de esfuerzos consiste en la determinación de la matriz de esfuerzos $\sigma(x, y, z)$ y de los desplazamientos $\mathbf{s}(x, y, z)$ en un cuerpo sólido sometido a fuerzas de volumen, fuerzas de superficie y a desplazamientos preestablecidos en algunos puntos o subregiones de la superficie. Las incógnitas del problema están constituidas entonces por nueve funciones escalares de campo, que son las seis componentes de la matriz de esfuerzos σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz}, y los tres desplazamientos u, v y w. Los datos, por otra parte, están conformados por tres grupos bien identificados. Primero tenemos el campo de las fuerzas de volumen $\mathbf{f}(x, y, z)$, el cual actúa sobre toda la región ocupada por el sólido y generalmente se refiere al peso del sólido o a las fuerzas inerciales cuando se trata de problemas dinámicos. En segundo lugar tenemos las fuerzas de

superficie $\mathbf{T}(x, y, z)$ que actúan únicamente en la frontera del sólido y se refieren justamente a las cargas que éste deberá soportar o transmitir. En último, tenemos los datos relativos a las restricciones de tipo cinemático, los cuales están constituidos por la especificación de los desplazamientos en aquellos puntos o zonas donde el sólido está restringido en sus movimientos debido a los soportes o al contacto con otros cuerpos.

Desde el punto de vista matemático, las fuerzas de volumen están incluidas en las ecuaciones que gobiernan el problema, mientras que las fuerzas de superficie y los desplazamientos conocidos se manejan como condiciones de borde. A las fuerzas de superficie se les llama condiciones de borde *naturales*, *dinámicas* o de *Neumann*, mientras que a los desplazamientos en la superficie se les da el nombre de condiciones de borde *esenciales*, *cinemáticas* o de *Dirichlet*.

Para formular el problema tenemos a disposición las siguientes ecuaciones:

a) *Ecuaciones de equilibrio*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

b) *Ecuaciones deformación-desplazamiento*

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \gamma_{xz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \gamma_{yz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{5.2}$$

c) *Ecuaciones constitutivas*

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
\tau_{xy} &= 2G\gamma_{xy} \\
\tau_{xz} &= 2G\gamma_{xz} \\
\tau_{yz} &= 2G\gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Tenemos así un sistema bien complejo conformado por 15 ecuaciones con 15 funciones incógnita, que son las seis componentes de la matriz de esfuerzos, las seis componentes de la matriz de deformaciones y los tres desplazamientos. Este sistema puede ser reducido a un sistema de 9 ecuaciones diferenciales con 9 funciones incógnita mediante la sustitución las Ecs. (5.2) en las Ecs. (5.3) y eliminando así del problema las seis componentes de deformación.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \\
&\sigma_x = 2G\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\sigma_y = 2G\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\sigma_z = 2G\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
&\tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

El sistema de ecuaciones (5.4) debe satisfacerse en todo punto inter la región Ω ocupada por el sólido, mientras que en la superficie exterior componentes de la matriz de esfuerzos σ deben satisfacer las condicion borde

$$\mathbf{T} = \sigma\,\mathbf{n}$$

donde $\mathbf{T}$ es el vector esfuerzo que actúa en cada punto $\mathbf{r}\in\Gamma$ y $\mathbf{n}$ es el unitario normal en $\mathbf{r}$. Si los desplazamientos están especificados a pri algunos puntos o zonas de la frontera, entonces $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{s}_0$ para los puntos donde los desplazamientos $\mathbf{s}_0$ están especificados.

Puede demostrarse que el sistema de ecuaciones (5.4) junto c condiciones de borde para las fuerzas de superficie y para los desplazam es completo en el sentido de que si existe una solución ésta es única[52].

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones (5.4) las deformaciones p determinarse mediante las Ecs. (5.2).

Si en el problema no existen condiciones de borde para desplazamientos, entonces las fuerzas de volumen $\mathbf{f}$ y las fuerzas de supe $\mathbf{T}$ deben estar en equilibrio.

Los problemas a resolver son de diferente naturaleza dependiendo condiciones de borde que se especifiquen:

Problema fundamental 1

Dada la distribución de fuerzas de volumen $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ en la región Ω oc por el sólido y la distribución de las fuerzas de superficie $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ en la front se desea determinar la distribución de esfuerzos $\sigma(\mathbf{r})$ y el camp desplazamientos $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ en Ω.

Problema fundamental 2

Dada la distribución de fuerzas de volumen $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ en la región Ω oc por el sólido y el campo de desplazamientos $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ en la frontera Γ, se determinar la distribución de esfuerzos $\sigma(\mathbf{r})$ y el campo de desplazamient en Ω.

[52] Ver el libro de I. N. Sokolnikoff, *"Mathematical Theory of Elasticity"*, Second

Problema mixto

Dada la distribución de fuerzas de volumen $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ en la región Ω ocupada por el sólido, la distribución de las fuerzas de superficie $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ en una parte de la frontera Γ_T y el campo de desplazamientos $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ en otra parte diferente Γ_S, con $\Gamma_T \cap \Gamma_S = \Phi$, se desea determinar la distribución de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ y el campo de desplazamientos $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ en Ω.

En las secciones siguientes abordaremos en detalle las formulaciones específicas para estos problemas.

5.2 Ecuaciones de Beltrami-Michell

En los problemas del tipo 1 sería conveniente tener todas las ecuaciones diferenciales en términos de los esfuerzos únicamente. Sin embargo, es importante destacar que no toda distribución de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ que satisfaga las ecuaciones de equilibrio (5.1) corresponde a una distribución posible de desplazamientos $\mathbf{s}(\mathbf{r})$, a menos que las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$ calculadas a partir de los esfuerzos mediante las ecuaciones constitutivas satisfagan las ecuaciones de compatibilidad (2.62) deducidas en el Cap. 2.

Supongamos entonces que tenemos una distribución de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ que satisface las ecuaciones de equilibrio (5.1). Podemos entonces calcular las deformaciones utilizando las ecuaciones constitutivas (3.25) presentadas en el Cap. 3

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{1+\nu}{E}\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{1+\nu}{E}\tau_{xz} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{1+\nu}{E}\tau_{yz} \end{cases} \tag{5.6}$$

e integrar las ecuaciones deformación-desplazamiento (5.2) para obtener así l desplazamientos u, v y w. Sin embargo, del Cap. 2 sabemos que las Ecs. (tienen solución si, y solo si, la región Ω ocupada por el sólido es simplemen conexa y se satisfacen en Ω las ecuaciones de compatibilidad (2.62). Tratem entonces de escribir las ecuaciones de compatibilidad directamente en términ de esfuerzos. La primera de estas ecuaciones es

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \tag{a}$$

Haciendo

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{5.}$$

podemos escribir, a partir de las Ecs. constitutivas (5.6),

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \nu\sigma_y\right] \end{aligned}$$

Esto es

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_y - \nu\Theta\right] \tag{b}$$

Análogamente,

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_z - \nu\Theta\right] \tag{c}$$

De las Ecs. (5.6) tenemos también que

$$\gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{yz} \tag{d}$$

Derivando las Ecs. (b), (c) y (d), sustituyendo en la Ec. (a) y agrupando términos obtenemos

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}\right)-\nu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)=2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial z} \qquad (e)$$

Derivando ahora con respecto a x, y y z la primera, segunda y tercera de las Ecs. de equilibrio (5.1), respectivamente, tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial f_x}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial z}+\dfrac{\partial f_y}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial z}+\dfrac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}+\dfrac{\partial f_z}{\partial z}=0 \end{cases}$$

Sumando la dos últimas ecuaciones y restándole a este resultado la tercera, obtenemos

$$\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}-\frac{\partial f_x}{\partial x}=0$$

De donde

$$2\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial z}=-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial f_y}{\partial y}-\frac{\partial f_z}{\partial z}+\frac{\partial f_x}{\partial x}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (e) obtenemos

$$(1+\nu)\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_y+\sigma_z)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_y+\sigma_z)-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right]-\nu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)= (1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}-\frac{\partial f_y}{\partial y}-\frac{\partial f_z}{\partial z}\right) \qquad (f)$$

Procediendo de una manera similar con la segunda y tercera de las ecuaciones de compatibilidad (2.62), obtenemos

$$(1+\nu)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_z)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x+\sigma_z)-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right]-\nu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)= (1+\nu)\left(-\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}-\frac{\partial f_z}{\partial z}\right) \qquad (g)$$

$$(1+\nu)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x+\sigma_y)-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}\right]-\nu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)= (1+\nu)\left(-\frac{\partial f_x}{\partial x}-\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right) \qquad (h)$$

Sumando ahora las Ecs. (f), (g) y (h), usando la Ec. (5.7) y agrupando tenemos, obtenemos que

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)$$

O bien, en forma compacta,

$$\nabla^2\Theta=-\frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla\circ\mathbf{f} \qquad (5.$$

donde $\nabla^2\Theta$ es el laplaciano de la función Θ y $\nabla\circ\mathbf{f}$ es la divergencia del campo vectorial $\mathbf{f}$.

Sumando y restando términos en forma conveniente en la Ec. (f) tenemos

$$(1+\nu)\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}\right]$$
$$-\nu\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}\right)= (1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)$$

Agrupando términos

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\Theta-\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-\nabla^2\sigma_x\right)-\nu\left(\nabla^2\Theta-\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right)=(1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}-\frac{\partial f_y}{\partial y}-\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)$$

Esto es

$$\nabla^2\Theta-\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-(1+\nu)\nabla^2\sigma_x=(1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}-\frac{\partial f_y}{\partial y}-\frac{\partial f_z}{\partial z}\right)$$

Utilizando la Ec. (5.8) y manipulando términos obtenemos finalmente

$$\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=-\frac{\nu}{1-\nu}\nabla\circ\mathbf{f}-2\frac{\partial f_x}{\partial x}$$

Procediendo de una manera similar con el resto de las ecuaciones, obtenemos las seis ecuaciones de compatibilidad en términos de los esfuerzos

$$\begin{aligned}
\nabla^2\sigma_x+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)&=-\frac{\nu}{1-\nu}\nabla\circ\mathbf{f}-2\frac{\partial f_x}{\partial x}\\
\nabla^2\sigma_y+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)&=-\frac{\nu}{1-\nu}\nabla\circ\mathbf{f}-2\frac{\partial f_y}{\partial y}\\
\nabla^2\sigma_z+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)&=-\frac{\nu}{1-\nu}\nabla\circ\mathbf{f}-2\frac{\partial f_z}{\partial z}\\
\nabla^2\tau_{xy}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)&=-\left(\frac{\partial f_x}{\partial y}+\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)\\
\nabla^2\tau_{xz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)&=-\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}+\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\\
\nabla^2\tau_{yz}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)&=-\left(\frac{\partial f_y}{\partial z}+\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)
\end{aligned}\qquad(5.9)$$

llamadas *ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell* en honor al científico italiano Eugenio Beltrami (1835-1900), quien las obtuvo en 1892 sin considerar las fuerzas de volumen, y al científico australiano J. H. Michell (1863-1940), quien las dedujo en 1900 en la forma general como se acaban de desarrollar.

Para resolver entonces un problema del tipo 1, los esfuerzos deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio (5.1) y las ecuaciones de compatibilidad

(5.9) en la región Ω ocupada por el sólido. De esta manera se garantiza la existencia de un campo de desplazamientos $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ obtenido mediante integración de las ecuaciones deformación-desplazamiento (5.2). Claro está para integrar estas ecuaciones habrá de calcularse previamente las deformaciones a partir de los esfuerzos utilizando las ecuaciones constitutivas (5.6).

5.3 Ecuaciones de Cauchy-Navier

En los problemas del tipo 2 sería conveniente tener todas las ecuaciones diferenciales en términos de los desplazamientos únicamente. Con este propósito, derivemos entonces las ecuaciones 4ª, 7ª y 8ª en el sistema de ecuaciones (5.4) con respecto a x, y y z, respectivamente, y sustituyamos los resultados en la primera de las ecuaciones de equilibrio (5.1) para obtener

$$2G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)+f_x$$

Agrupando términos, tenemos

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+(\lambda+G)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)+f_x=0$$

Esto es

$$G\nabla^2 u+(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+f_x=0$$

O bien

$$\nabla^2 u+\frac{\lambda+G}{G}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{f_x}{G}=0$$

Usando las relaciones (3.23) y (3.24) tenemos que

$$\frac{\lambda+G}{G}=\frac{\lambda}{G}+1=\frac{\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}{\dfrac{E}{2(1+\nu)}}+1=\frac{2\nu}{1-2\nu}+1=\frac{1}{1-2\nu}$$

y

$$\frac{1}{G}=\frac{2(1+\nu)}{E}$$

Luego

$$\nabla^2 u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{2(1+\nu)}{E}f_x=0$$

De una manera similar puede procederse con las dos ecuaciones de equilibrio restantes para obtener finalmente las ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{2(1+\nu)}{E}f_x=0\\
&\nabla^2 v+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{2(1+\nu)}{E}f_y=0\\
&\nabla^2 w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{2(1+\nu)}{E}f_z=0
\end{aligned}\qquad (5.10)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuaciones de equilibrio de Cauchy-Navier* y pueden escribirse como una sola ecuación vectorial compacta

$$\nabla^2\mathbf{s}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\circ\mathbf{s})+\frac{2(1+\nu)}{E}\mathbf{f}=\mathbf{0}\qquad (5.11)$$

donde

$$\nabla^2\mathbf{s}=(\nabla^2 u)\mathbf{i}+(\nabla^2 v)\mathbf{j}+(\nabla^2 w)\mathbf{k}\qquad (5.12)$$

es el laplaciano del campo de desplazamientos **s**, definido como un campo vectorial cuyas componentes vienen dadas por el laplaciano de las componentes de **s**, mientras que

$$\nabla(\nabla\circ\mathbf{s})=\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\circ\mathbf{s})\right]\mathbf{i}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\circ\mathbf{s})\right]\mathbf{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\circ\mathbf{s})\right]\mathbf{k}\qquad (5.13)$$

es el gradiente de la divergencia del campo de desplazamientos **s**.

Una vez que se tiene la solución de estas ecuaciones en términos de los desplazamientos u, v y w, se calculan las deformaciones mediante las ecuaciones deformación-desplazamiento (5.2) y, a partir de estas deformaciones, los esfuerzos pueden ser calculados directamente por medio de las ecuaciones constitutivas (5.3).

5.4 Principio de Superposición

Hemos visto que los problemas de análisis de esfuerzos se han planteado como problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con condiciones de borde. Dadas las dificultades matemáticas normalmente asociadas a este tipo de problemas, una de las estrategias comúnmente utilizadas para abordarlos consiste en descomponer un problema complejo en varios problemas simples. Dado que nuestro modelo del comportamiento de los sólidos es lineal, la solución del problema original puede obtenerse como la suma de las soluciones de los problemas individuales. Esto es lo que se conoce como el *principio de superposición de causas y efectos*.

A modo ilustrativo, presentamos formalmente el siguiente teorema para el problema fundamental 1, dejando como ejercicio para el lector el enunciado y la demostración del teorema para el problema fundamental 2.

Teorema

Sea $\sigma'(\mathbf{r})$ la distribución de esfuerzos correspondiente a unas fuerzas de volumen $\mathbf{f}'(\mathbf{r})$ y a unas fuerzas de superficie $\mathbf{T}'(\mathbf{r})$, y sea $\sigma''(\mathbf{r})$ la distribución de esfuerzos correspondiente a unas fuerzas $\mathbf{f}''(\mathbf{r})$ y $\mathbf{T}''(\mathbf{r})$.

Entonces la distribución de esfuerzos correspondiente a unas fuerzas de volumen $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}'(\mathbf{r}) + \mathbf{f}''(\mathbf{r})$ y a unas fuerzas de superficie $\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}'(\mathbf{r}) + \mathbf{T}''(\mathbf{r})$ viene dada por $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma'(\mathbf{r}) + \sigma''(\mathbf{r})$.

Demostración:

Por hipótesis se sabe que las distribuciones de esfuerzos $\sigma'(\mathbf{r})$ y $\sigma''(\mathbf{r})$ satisfacen las ecuaciones de equilibrio. Así, por ejemplo, aplicando la primera de ellas para ambas distribuciones de esfuerzos se tiene

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + f'_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma''_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z} + f''_x = 0$$

Sumando término a término observamos que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma'_x + \sigma''_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau'_{xy} + \tau''_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau'_{xz} + \tau''_{xz}) + f'_x + f''_x = 0 \qquad (5.14a)$$

De una manera similar, aplicando las ecuaciones de equilibrio restantes puede comprobarse que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau'_{xy} + \tau''_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma'_y + \sigma''_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau'_{yz} + \tau''_{yz}) + f'_y + f''_y = 0 \qquad (5.14b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau'_{xz} + \tau''_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau'_{yz} + \tau''_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma'_z + \sigma''_z) + f'_z + f''_z = 0 \qquad (5.14c)$$

Análogamente, sabemos, por hipótesis, que en la frontera Γ del sólido se satisfacen las siguientes condiciones de borde

$$\mathbf{T}'(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma'(\mathbf{r})\cdot \mathbf{n}, \qquad \mathbf{r}\in\Gamma$$
$$\mathbf{T}''(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma''(\mathbf{r})\cdot \mathbf{n}, \qquad \mathbf{r}\in\Gamma$$

Sumando miembro a miembro tenemos

$$\mathbf{T}'(\mathbf{r},\mathbf{n}) + \mathbf{T}''(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma'(\mathbf{r})\cdot \mathbf{n} + \sigma''(\mathbf{r})\cdot \mathbf{n}, \qquad \mathbf{r}\in\Gamma$$

Es decir

$$\mathbf{T}'(\mathbf{r},\mathbf{n}) + \mathbf{T}''(\mathbf{r},\mathbf{n}) = [\sigma'(\mathbf{r}) + \sigma''(\mathbf{r})]\cdot \mathbf{n}, \qquad \mathbf{r}\in\Gamma \qquad (5.15)$$

Por último, se sabe también, por hipótesis, que las distribuciones de esfuerzos $\sigma'(\mathbf{r})$ y $\sigma''(\mathbf{r})$ satisfacen las ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell. Aplicando la primera de ellas a ambas distribuciones de esfuerzos tenemos

$$\nabla^2\sigma'_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) = -\frac{\nu}{1-\nu}\nabla\circ\mathbf{f}' - 2\frac{\partial f'_x}{\partial x}$$

$$\nabla^2\sigma''_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma''_x + \sigma''_y + \sigma''_z) = -\frac{\nu}{1-\nu}\nabla\circ\mathbf{f}'' - 2\frac{\partial f''_x}{\partial x}$$

Sumando miembro a miembro estas dos ecuaciones obtenemos

$$\nabla^2(\sigma'_x + \sigma''_x) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(\sigma'_x + \sigma''_x) + (\sigma'_y + \sigma''_y) + (\sigma'_z + \sigma''_z)\right] = \qquad (5.16)$$
$$= -\frac{\nu}{1-\nu}\nabla\circ(\mathbf{f}' + \mathbf{f}'') - 2\frac{\partial}{\partial x}(f'_x + f''_x)$$

De una manera similar puede procederse con el resto de las ecuaciones de compatibilidad para concluir, finalmente, a partir de las Ecs. (5.14), (5.15) y (5.16), que la distribución de esfuerzos correspondiente a unas fuerzas de volumen $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}'(\mathbf{r}) + \mathbf{f}''(\mathbf{r})$ y a unas fuerzas de superficie $\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}'(\mathbf{r}) + \mathbf{T}''(\mathbf{r})$ viene dada por $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma'(\mathbf{r}) + \sigma''(\mathbf{r})$, como se quería demostrar. ∎

5.5 Principio de Saint-Venant

El principio de Saint-Venant es otras de las estrategias comúnmente utilizadas cuando se resuelven problemas de análisis de esfuerzos. Este principio, propuesto por primera vez en 1855 por el eminente ingeniero francés Barré de Saint-Venant, permite simplificar el problema que se presenta con la aplicación de las condiciones de borde para las fuerzas de superficie. El principio puede ser establecido de la siguiente manera:

Si un sistema de cargas que actúa en una zona de la superficie de un sólido se reemplaza por otro sistema de cargas *estáticamente equivalente* actuando en

la misma zona, entonces los efectos de ambos sistemas de cargas son esencialmente los mismos en aquellas regiones del *sólido suficientemente alejadas* de la zona de aplicación de las cargas.

En el contexto del principio de Saint-Venant, la expresión "suficientemente alejadas" significa que las regiones sobre las cuales no se siente el efecto de la modificación del sistema de cargas están a grandes distancias comparadas con las dimensiones lineales de la zona de la superficie sobre la cual actúa el sistema de cargas. La expresión "estáticamente equivalente", como se sabe ya de los cursos de Mecánica, significa que los dos sistemas de fuerzas poseen la misma fuerza y el mismo momento resultantes.

El principio de Saint-Venant se ha utilizado ampliamente durante más de un siglo y, aun cuando no es posible demostrarlo de manera formal, no se ha encontrado hasta ahora ninguna evidencia que lo invalide. Es tan grande la utilidad de este principio que muchas veces lo utilizamos sin estar plenamente conscientes de ello. Por ejemplo, cuando se procede a calcular una viga que está simplemente apoyada sobre dos superficies en sus extremos, la distribución de las fuerzas de contacto que se generan entre los extremos de la viga y las superficies de apoyo se desconoce. Sin embargo, como la zona crítica de la viga está ubicada en el centro de ésta y debido a que generalmente las dimensiones longitudinales de la viga son relativamente grandes comparadas con la zona de apoyo, las fuerzas de contacto que se generan en cada extremo de la viga son reemplazadas por una fuerza concentrada calculada en base a consideraciones simples de equilibrio estático. Esta suposición, clásica en la teoría de barras, produce excelentes resultados en lo relativo a su dimensionamiento mediante el cálculo de los esfuerzos máximos en el centro de la viga. Sin embargo, como es de suponer, los esfuerzos que predice la teoría de vigas son incorrectos en las cercanías de los apoyos de la viga.

Problemas

5.1 Demuestre que si el campo de fuerzas de volumen es conservativo tal que $\nabla \circ \mathbf{f} = 0$, entonces

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$$

$$\nabla^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0$$

5.2 Demuestre que si el campo de fuerzas de volumen es conservativo, entonces las ecuaciones de Beltrami-Michell pueden escribirse como

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2\psi - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2\psi - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2\psi - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}$$

$$\nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}$$

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}$$

donde $\mathbf{f} = \nabla\psi$.

5.3 Demuestre que si el campo de fuerzas de volumen es uniforme, entonces

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0, \qquad \nabla^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0$$

$$\nabla^4\sigma_x = \nabla^2(\nabla^2\sigma_x) = 0, \qquad \nabla^4\tau_{xy} = \nabla^2(\nabla^2\tau_{xy}) = 0$$

$$\nabla^4\sigma_y = \nabla^2(\nabla^2\sigma_y) = 0, \qquad \nabla^4\tau_{xz} = \nabla^2(\nabla^2\tau_{xz}) = 0$$

$$\nabla^4\sigma_z = \nabla^2(\nabla^2\sigma_z) = 0, \qquad \nabla^4\tau_{yz} = \nabla^2(\nabla^2\tau_{yz}) = 0$$

$$\nabla^4\varepsilon_x = \nabla^2(\nabla^2\varepsilon_x) = 0, \qquad \nabla^4\gamma_{xy} = \nabla^2(\nabla^2\gamma_{xy}) = 0$$

$$\nabla^4\varepsilon_y = \nabla^2(\nabla^2\varepsilon_y) = 0, \qquad \nabla^4\gamma_{xz} = \nabla^2(\nabla^2\gamma_{xz}) = 0$$

$$\nabla^4\varepsilon_z = \nabla^2(\nabla^2\varepsilon_z) = 0, \qquad \nabla^4\gamma_{yz} = \nabla^2(\nabla^2\gamma_{yz}) = 0$$

5.4 Demuestre que la distribución de esfuerzos

$$\sigma_x = k\,[y^2 + \nu(x^2 - y^2)]$$
$$\sigma_y = k\,[x^2 + \nu(y^2 - x^2)]$$
$$\sigma_z = \nu k\,(x^2 + y^2)$$
$$\tau_{xy} = -2\nu kxy$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

donde k es una constante no nula, no es la solución de ningún problema de análisis de esfuerzos aún cuando satisface la ecuaciones de equilibrio con fuerzas de volumen nulas.

5.5 Sea $\psi(x, y, z)$ un campo escalar a partir del cual puede calcularse la matriz de esfuerzos como

$$\sigma = \begin{bmatrix} \partial^2\psi/\partial x^2 & \partial^2\psi/\partial x\partial y & \partial^2\psi/\partial x\partial z \\ \partial^2\psi/\partial x\partial y & \partial^2\psi/\partial y^2 & \partial^2\psi/\partial y\partial z \\ \partial^2\psi/\partial x\partial z & \partial^2\psi/\partial y\partial z & \partial^2\psi/\partial z^2 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que las fuerzas de volumen son nulas, demuestre que:

a) Las ecuaciones de equilibrio se satisfacen solo si el Laplaciano $\nabla^2\psi$ es constante.
b) Si el Laplaciano $\nabla^2\psi$ es constante, entonces se satisfacen las ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michell.

5.6 Considere la distribución de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} ky & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde k es una constante.

a) Demuestre que esta distribución de esfuerzos representa la solución de un problema de análisis de esfuerzos con fuerzas de volumen nulas.

b) Determine el campo de desplazamientos correspondiente si el desplazamiento y la rotación en el origen son nulos.

5.7 Considere la distribución de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} kxy & -ky^2/2 & 0 \\ -ky^2/2 & kx & 0 \\ 0 & 0 & \nu kx(1+y) \end{bmatrix}$$

donde k es una constante.

a) Demuestre que esta distribución de esfuerzos representa la solución de un problema de análisis de esfuerzos con fuerzas de volumen nulas.
b) Determine el campo de desplazamientos correspondiente si el desplazamiento y la rotación en el origen son nulos.

5.8 Considere la distribución de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} kxy & k(r^2 - y^2)/2 & 0 \\ k(r^2 - y^2)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu kxy \end{bmatrix}$$

donde k y r son constantes.

a) Demuestre que esta distribución de esfuerzos representa la solución de un problema de análisis de esfuerzos con fuerzas de volumen nulas.
b) Determine el campo de desplazamientos correspondiente si el desplazamiento y la rotación en el origen son nulos.

5.9 Un cambio de temperatura $\Delta T = T(x, y, z)$, produce deformaciones

$$\varepsilon_x^{(\Delta T)} = \varepsilon_y^{(\Delta T)} = \varepsilon_z^{(\Delta T)} = \alpha T$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

donde α es el llamado coeficiente de dilatación lineal del material. Suponiendo que las deformaciones provocadas por los esfuerzos y las provocadas por el cambio de temperatura pueden superponerse, que el

material es elástico, lineal e isótropo y que el cambio de temperatura no afecta las propiedades del material, demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Navier pueden expresarse como

$$(1-2\nu)\nabla^2\mathbf{s}+\nabla(\nabla\circ\mathbf{s})+\frac{1-2\nu}{G}\mathbf{f}=2\alpha(1+\nu)\nabla T$$

5.10 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$ un campo vectorial a partir del cual pueden calcularse los desplazamientos como

$$u=\frac{1-\nu}{G}\nabla^2F_x-\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial x}\nabla\circ\mathbf{F}$$

$$v=\frac{1-\nu}{G}\nabla^2F_y-\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial y}\nabla\circ\mathbf{F}$$

$$w=\frac{1-\nu}{G}\nabla^2F_z-\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial z}\nabla\circ\mathbf{F}$$

a) Demuestre entonces que $\mathbf{F}(x, y, z)$ satisface la ecuación

$$\nabla^4\mathbf{F}+\frac{\mathbf{f}}{1-\nu}=\mathbf{0}$$

donde $\nabla^4\mathbf{F}=\nabla^4F_x\,\mathbf{i}+\nabla^4F_y\,\mathbf{i}+\nabla^4F_z\,\mathbf{i}$.

b) Determine la distribución de esfuerzos en función de $\mathbf{F}(x, y, z)$.

5.11 Suponga que el campo de desplazamientos en un sólido viene dado por

$$\mathbf{s}=\frac{1}{2G}\left\{\mathbf{F}-\nabla\left[\varphi+\frac{\mathbf{r}\circ\mathbf{F}}{4(1-\nu)}\right]\right\}$$

donde $\varphi(x, y, z)$ es un campo escalar, $\mathbf{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial y $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+ y\mathbf{j}+ z\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula genérica. Demuestre que, en ausencia de fuerzas de volumen, los campos φ y $\mathbf{F}$ satisfacen la ecuación diferencial

$$\nabla^2\mathbf{F}-\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\nabla(\nabla^2\varphi)-\frac{1}{2(1-2\nu)}\nabla(\mathbf{r}\circ\nabla^2\mathbf{F})=\mathbf{0}$$

donde $\nabla^2\mathbf{F}=\nabla^2F_x\,\mathbf{i}+\nabla^2F_y\,\mathbf{i}+\nabla^2F_z\,\mathbf{i}$.

5.12 Las ecuaciones Cauchy-Navier

$$\nabla^2\mathbf{s}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\circ\mathbf{s})+\frac{2(1+\nu)}{E}\mathbf{f}=\mathbf{0}$$

se hacen indeterminadas cuando $\nu = 1/2$. Demuestre que en este caso las ecuaciones de Cauchy-Navier pueden ser escritas como

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\\[2ex]\nabla^2\mathbf{s}+\dfrac{1}{E}\left[\nabla(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)+3\mathbf{f}\right]=\mathbf{0}\end{cases}$$

5.13 En la solución de un problema de análisis de esfuerzos se obtuvieron las dos soluciones siguientes:

Solución 1	Solución 2
$u_1 = -6xy + y + z + 1$	$u_2 = -6xy - y + 2z - 1$
$v_1 = 3x^2 - 3y^2 - 9z^2 - x + 2z - 1$	$v_2 = 3x^2 - 3y^2 - 9z^2 + x + 3z + 2$
$w_1 = 18yz - x - 2y + 2$	$w_2 = 18yz - 2x - 3y + 3$

a) Demuestre que la única diferencia entre ambas soluciones está representada por un desplazamiento rígido infinitesimal.

b) Si $E = 2 \times 10^5$ MPa y $\nu = 1/3$, verifique que ambos campos de desplazamientos satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Navier con fuerzas de volumen nulas.

c) Determine la distribución de esfuerzos correspondiente a ambas soluciones. ¿Satisface esta distribución de esfuerzos las ecuaciones de equilibrio?

5.14 Suponga que el campo de desplazamientos en un sólido con fuerzas de volumen nulas viene dado por

$$\mathbf{s}=\nabla\varphi$$

donde φ es un campo escalar.

a) Demuestre entonces que φ debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\nabla\left(\nabla^2\varphi\right)=\mathbf{0}$$

b) Determine la distribución de esfuerzos en términos de φ.

5.15 Para analizar la distribución de esfuerzos en un recipiente cilíndrico se propone el campo de desplazamientos

$$u = x\,f(r)$$
$$v = y\,f(r)$$
$$w \equiv 0$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia radial desde el eje del cilindro a un punto genérico de coordenadas (x, y) y f es una función desconocida de la variable r. Despreciando las fuerzas de volumen, demuestre que la función f debe satisfacer la ecuación diferencial $rf''(r) + 3f'(r) = 0$.

Capítulo 6

Algunos Problemas Elementales

6.1 Introducción

Tal como quedó establecido en el capítulo anterior, para formular y resolver un problema de análisis de esfuerzos se debe encontrar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (5.4) en las nueve funciones incógnita σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, u, v y w. La eliminación sistemática de algunas de estas funciones incógnita nos ha conducido a reducir el número de ecuaciones. Así, por ejemplo, mediante la eliminación de los desplazamientos u, v y w las ecuaciones se redujeron a seis, que son las ecuaciones de Beltrami-Michell, mientras que con la eliminación de los esfuerzos las ecuaciones se condensaron en las tres representadas por las ecuaciones de Cauchy-Navier. Sin embargo, las complicaciones matemáticas aún subsisten.

Muchos son los métodos que se han desarrollado para la solución de problemas en análisis de esfuerzos, los cuales pueden agruparse en las siguientes categorías:

a) Métodos inversos
En estos métodos se propone una solución que satisface las ecuaciones diferenciales y se trata de encontrar las condiciones de borde a las cuales corresponde la solución propuesta.

b) Métodos semi-inversos
Se propone una solución incompleta en términos de funciones o parámetros desconocidos, los cuales se determinan forzando a que se cumplan las ecuaciones diferenciales pertinentes e imponiendo las condiciones de borde que correspondan.

c) Métodos directos
Se particularizan las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde para el problema específico que se está resolviendo y luego se utilizan herramientas analíticas o numéricas para determinar su solución.

d) Métodos simplificados
Son aquellos que se obtienen mediante el establecimiento de hipótesis que simplifican notablemente las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema junto con sus respectivas condiciones de borde. Mediante la aplicación de estos métodos surgieron en el pasado disciplinas casi independientes tales como la *Resistencia de Materiales*, dedicada al estudio del comportamiento de las barras, y la *Teoría de Placas*.

Otra clasificación que se usa con frecuencia conviene en agrupar los métodos en tres grandes categorías:

a) Métodos analíticos
Son aquellos en los cuales se usan las herramientas habituales del cálculo diferencial e integral para abordar los problemas de análisis de esfuerzos, entre los cuales cabe citar el método de los potenciales, el método de las transformaciones integrales y los métodos de variable compleja.

b) Métodos semi-analíticos
Son aquellos en los cuales se utilizan técnicas analíticas de aproximación de funciones, tales como los métodos variacionales y el método de los residuos ponderados.

c) Métodos numéricos
Como su nombre lo indica, son aquellos en los cuales se utilizan las herramientas del análisis numérico para resolver los problemas de manera aproximada mediante el uso del computador, dentro de los cuales se encuentran el método de las diferencias finitas, el método de los elementos finitos, el método de los elementos de frontera y los denominados métodos sin malla.

Aunque ello pueda resultar aventurado, hoy en día es posible afirmar que todos los problemas básicos de análisis de esfuerzos susceptibles de ser abordados en forma analítica ya han sido resueltos[53]. De manera que el énfasis actual se centra más bien en la formulación y solución de problemas mediante el uso de métodos numéricos mediante el computador digital, siendo actualmente el más exitoso de ellos el método del elemento finito. Es por ello que este libro se ha centrado más que nada en la parte conceptual y metodológica del análisis de esfuerzos, pues hoy, quizás más que en ningún otro momento, se requiere una sólida preparación para el uso efectivo e inteligente de los programas computacionales que existen comercialmente. Ahora bien, con la finalidad de ilustrar los conceptos y las ideas básicas que hemos estado estudiando, presentamos en este último capítulo la formulación y solución analítica de algunos problemas elementales de análisis de esfuerzos utilizando métodos semi-inversos.

6.2 Cilindro Sometido a una Presión Interna

Como una aplicación elemental interesante presentamos a continuación el análisis de esfuerzos en un cilindro de longitud L, radio interior a y radio exterior b sometido a una presión interna p, tal como se muestra en la Fig. 6.1.

Los desplazamientos en la dirección axial del cilindro están restringidos en ambos extremos. La solución de este problema tiene amplias aplicaciones en el diseño de tuberías, recipientes a presión y reactores químicos, así como en el cálculo de las uniones prensadas entre árboles y engranajes.

Para resolver este problema utilizaremos el método semi-inverso apoyándonos en la simetría que presenta. Debido a esta simetría, podemos suponer que el desplazamiento resultante en el plano xy de un punto genérico de coordenadas (x, y, z) es radial y que su magnitud depende únicamente de su distancia al origen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, como se observa en la Fig. 6.2.

[53] Una excelente colección de problemas básicos resueltos puede revisarse en el libro de S. Timoshenko y J. Goodier "*Theory of Elasticity*", Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1970.

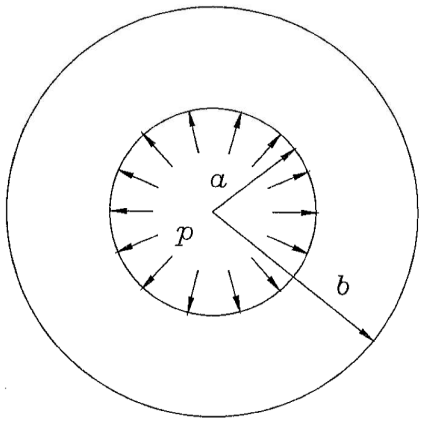


Figura 6.1 Cilindro sometido a una presión interna

Sea $f(r)$ la función que representa el valor del desplazamiento radial en el plano xy. Como los desplazamientos longitudinales del cilindro están restringidos axialmente, puede suponerse que $w(x, y, z) \equiv 0$. Entonces

$$u = f(r)\, x/r$$
$$v = f(r)\, y/r$$
$$w \equiv 0$$

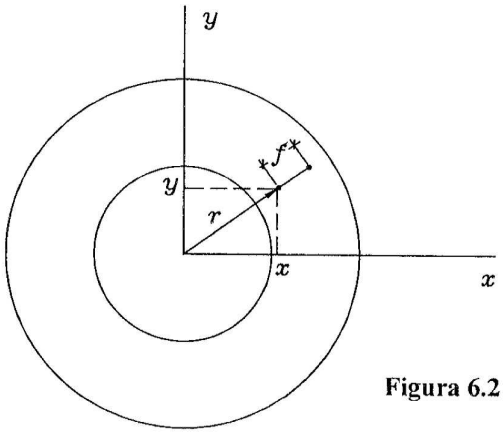


Figura 6.2 Desplazamiento radial en un cilindro sometido a presión interna

Si hacemos $g(r) = f(r)/r$ podemos escribir estos desplazamientos como

$$u = x\, g(r)$$
$$v = y\, g(r) \qquad (6$$
$$w \equiv 0$$

Estos desplazamientos deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Navi (5.10) con fuerzas de volumen nulas. Para utilizar la primera de est ecuaciones calculamos las derivadas pertinentes de los desplazamientos (6.1) aplicamos la regla de la cadena para obtener

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(r) + x\frac{dg}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = g(r) + \frac{x^2}{r}\frac{dg}{dr}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{dg}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{r}\right)\frac{dg}{dr} + \frac{x^2}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dg}{dr}\right)$$

$$= \frac{x}{r}\frac{dg}{dr} + \left(\frac{2x}{r} - \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{dg}{dr} + \frac{x^2}{r}\frac{d^2 g}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \left(\frac{3x}{r} - \frac{x^3}{r^3}\right)\frac{dg}{dr} + \frac{x^3}{r^2}\frac{d^2 g}{dr^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{dg}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{dg}{dr}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)\frac{dg}{dr} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dg}{dr}\right)\right] = \left(\frac{x}{r} - \frac{xy^2}{r^3}\right)\frac{dg}{dr} + \frac{xy^2}{r^2}\frac{d^2 g}{dr^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = g(r) + y\frac{dg}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = g(r) + \frac{y^2}{r}\frac{dg}{dr}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{dg}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + y^2\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dg}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2 g}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right] = \left(\frac{x}{r} - \frac{xy^2}{r^3}\right)\frac{dg}{dr} + \frac{xy^2}{r^2}\frac{d^2 g}{dr^2}$$

Sustituyendo entonces estos resultados en la primera de las Ecs. (5.10 obtenemos, después de algunas simplificaciones,

$$\nu\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{3x}{r}\frac{dg}{dr} + \frac{1}{1-2\nu}\left[x\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{3x}{r}\frac{dg}{dr}\right] = 0$$

Como el dominio de nuestro problema no incluye al origen, entonces $x \neq 0$ y

$$\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{dg}{dr} = 0 \tag{6.2}$$

Integrando esta ecuación diferencial obtenemos

$$g(r) = A + B/r^2 \tag{6.3}$$

donde A y B son constantes de integración.

Si sustituimos las expresiones (6.1) en la segunda de las Ecs. (5.10) obtenemos exactamente el mismo resultado, lo cual es lógico debido a la simetría del problema. La tercera ecuación de Cauchy-Navier se satisface idénticamente cualquiera sea la función $g(r)$.

Sustituyendo la Ec. (6.3) en las expresiones (6.1) conseguimos la estructura del campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned} u &= x(A + B/r^2) \\ v &= y(A + B/r^2) \\ w &\equiv 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Aplicando ahora las relaciones deformación-desplazamiento (5.2) podemos determinar la estructura de las componentes de deformación:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = A + \frac{B}{r^2}\left[1 - 2(x/r)^2\right] \tag{6.5a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = A + \frac{B}{r^2}\left[1 - 2(y/r)^2\right] \tag{6.5b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{6.5c}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{2xy}{r^4}B \tag{6.5d}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{6.5e}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \tag{6.5f}$$

Como se observa, en cada punto del cilindro existe un estado plano de deformaciones. Podemos entonces utilizar las Ecs. constitutivas (3.29) para proceder al cálculo de los esfuerzos

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{A + \frac{B}{r^2}\left[1 - 2(1-\nu)(x/r)^2 - 2\nu(y/r)^2\right]\right\} \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{A + \frac{B}{r^2}\left[1 - 2\nu(x/r)^2 - 2(1-\nu)(y/r)^2\right]\right\} \\ \sigma_z &= 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{2E}{1+\nu}\frac{xy}{r^4}B \end{aligned} \tag{6.6}$$

Las constantes de integración A y B se determinarán ahora a partir de las condiciones de borde. Como en la superficie interna del cilindro la presión es p y en la externa es 0, podemos tomar por conveniencia los puntos de coordenadas $(a, 0)$ y $(b, 0)$ para imponer las condiciones $\sigma_x(a, 0) = p$ y $\sigma_x(b, 0) = 0$ en la primera de las Ecs. (6.6) para obtener el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A - \dfrac{1-2\nu}{a^2}B = -\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)p}{E} \\ A - \dfrac{1-2\nu}{b^2}B = 0 \end{cases}$$

cuya solución viene dada por

$$\begin{cases} A = \dfrac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\dfrac{a^2}{b^2-a^2}p \\ B = \dfrac{1+\nu}{E}\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2}p \end{cases} \tag{6.7}$$

Para visualizar la distribución de esfuerzos y determinar el punto más crítico, analicemos la variación de los esfuerzos a lo largo de la recta $y = 0$. Sustituyendo los valores de las constantes A y B en las ecuaciones (6.6) y haciendo $y = 0$ obtenemos

$$\sigma_x = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left[1 - (b/x)^2\right]$$
$$\sigma_y = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left[1 + (b/x)^2\right] \qquad (6.8)$$
$$\sigma_z = 0$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Esta distribución de esfuerzos se ha obtenido, por comodidad, para la recta $y = 0$. Sin embargo, por la simetría radial del problema podemos concluir que esta distribución es idéntica a lo largo de cualquier radio. Si usamos entonces coordenadas polares (r, θ) y designamos con σ_r y σ_θ a los esfuerzos normales correspondientes (ver Fig. 6.3), podemos escribir las Ecs. (6.8) en la forma:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left[1 - (b/r)^2\right]$$
$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left[1 + (b/r)^2\right] \qquad (6.9)$$

que son los denominados esfuerzos *radial* y *tangencial* en la teoría de recipientes a presión.

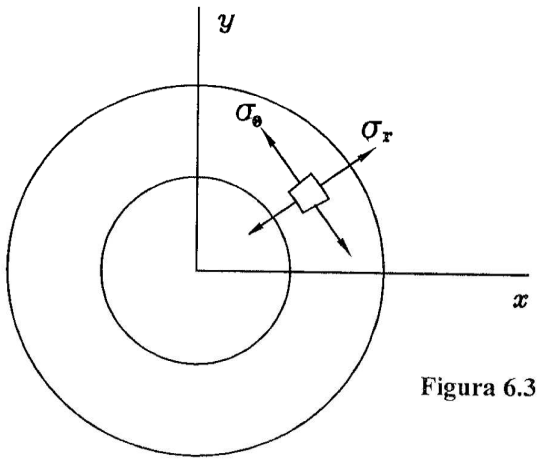


Figura 6.3 Esfuerzos radial y tangencial

En la Fig. 6.4 se muestra la distribución de estos esfuerzos a lo largo del espesor de la pared del cilindro. Nótese que los puntos más críticos son aquellos situados en la superficie interior del cilindro. En estos puntos los esfuerzos valen

$$\sigma_r = -p$$
$$\sigma_\theta = \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} p \qquad (6.10)$$

El esfuerzo de Tresca en estos puntos sería

$$\sigma_i = \sigma_3 - \sigma_1 = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} p \qquad (6.11)$$

Para que el cilindro no falle por fluencia $\sigma_i \leq S_y$. Luego la presión máxima que puede soportar el cilindro será

$$p \leq \frac{(b^2 - a^2) S_y}{2b^2} \qquad (6.12)$$

Un caso muy frecuente y de importantes aplicaciones se presenta cuando el espesor del cilindro es muy pequeño comparado con su diámetro, como es la situación de la mayoría de las tuberías y de los recipientes a presión. En este caso el esfuerzo tangencial σ_θ suele expresarse de manera aproximada en términos del diámetro y del espesor del cilindro.

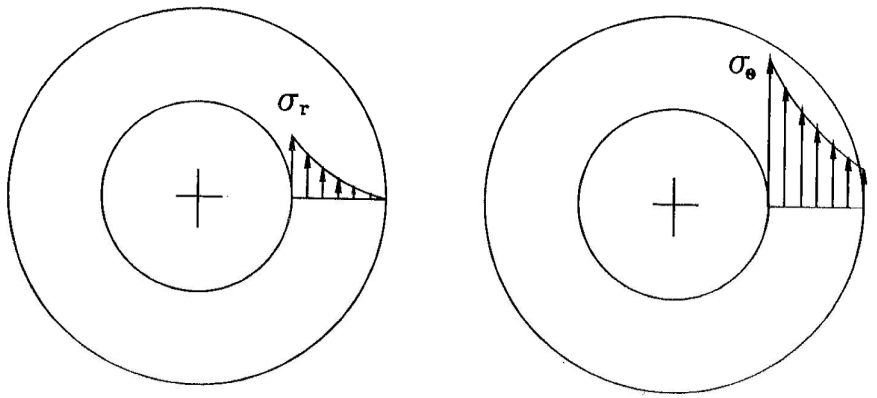


Figura 6.4 Distribución de los esfuerzos: a) radial; b) tangencial

Sea D el diámetro medio del cilindro y t su espesor. Entonces, de la Ec. (6.10)

$$\sigma_\theta = \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}p = \frac{\left(\frac{D}{2}-\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{D}{2}+\frac{t}{2}\right)^2}{\left(\frac{D}{2}+\frac{t}{2}\right)^2-\left(\frac{D}{2}-\frac{t}{2}\right)^2}p = \frac{D^2+t^2}{2Dt}p = \frac{1+(t/D)^2}{2t/D}p$$

Si el espesor es muy pequeño comparado con el diámetro[54], entonces $(t/D)^2 << 1$ y obtenemos la siguiente fórmula que nos da un valor aproximado para el esfuerzo tangencial

$$\sigma_\theta = \frac{pD}{2t} \tag{6.13}$$

Como el cociente D/t será, en general, un número relativamente grande, el esfuerzo tangencial σ_θ será mucho mayor que el esfuerzo radial σ_r. Puede entonces plantearse la aproximación $\sigma_3 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_1 = 0$, por lo que el esfuerzo de Tresca será simplemente

$$\sigma_i = \sigma_3 - \sigma_1 = \frac{pD}{2t} \tag{6.14}$$

Para que el cilindro no falle por fluencia, $\sigma_i \le S_y$. Luego la presión máxima que puede soportar el cilindro será

$$p \le \frac{2tS_y}{D} \tag{6.15}$$

mientras que el espesor necesario para que no falle será

$$t \ge \frac{pD}{2S_y} \tag{6.16}$$

Las fórmulas (6.15) y (6.16), con la inclusión de factores de seguridad apropiados, son muy convenientes para propósitos de diseño.

[54] Usualmente se considera que un cilindro es de pared delgada cuando $D/t > 10$.

6.3 Cargas Axiales

En esta sección analizaremos la distribución de esfuerzos en una barra de longitud L y sección transversal arbitraria sometida a sendas cargas axiales P de tracción en sus extremos, tal como se muestra en la Fig. 6.5.

En el presente contexto se entiende por *barra* al sólido delimitado por una superficie cilíndrica cuya longitud es mucho mayor que las dimensiones de su sección transversal, mientras que una carga se dice que es *axial* cuando su línea de acción es paralela al eje o generatriz de la barra. Los resultados que obtendremos son aplicables a numerosos casos de diseño en ingeniería, tales como tornillos, pernos, guayas, conexiones soldadas, elementos estructurales en grúas y cerchas, etc.

Fijemos entonces un sistema de coordenadas xyz de manera que el eje z coincida con la línea de acción de las cargas aplicadas. Si se visualiza la barra como compuesta por largas fibras longitudinales, puede entonces suponerse que únicamente actúan esfuerzos normales σ_z en la dirección axial de la barra. Si se supone además que estos esfuerzos se distribuyen uniformemente sobre la sección transversal, puede postularse entonces que

$$\sigma_z = constante$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{6.17}$$

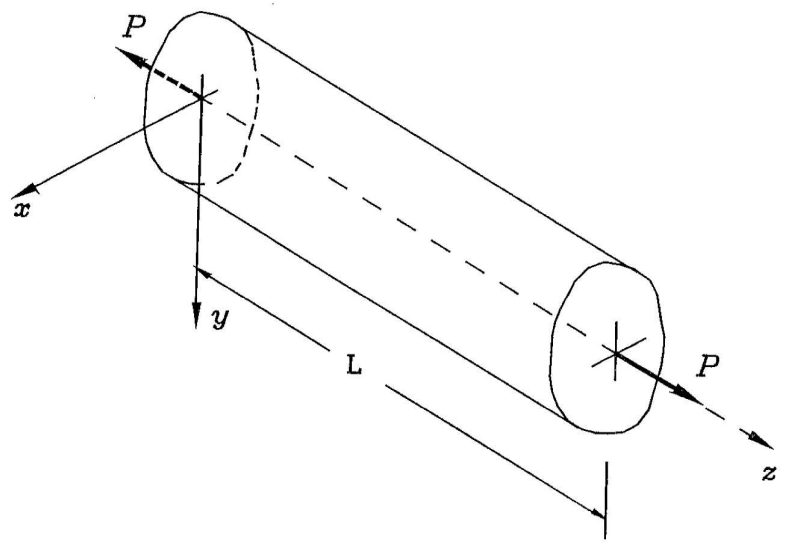


Figura 6.5 Barra sometida a cargas axiales de tracción

Despreciando las fuerzas de volumen, puede comprobarse fácilmente que estas ecuaciones satisfacen las ecuaciones de equilibrio (5.1) y las de compatibilidad (5.9) de Beltrami-Michell .

Como la superficie lateral de la barra está libre de cargas, debe verificarse que $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$ para todo punto $\mathbf{r}$ de dicha superficie. En efecto, como en la superficie lateral $\mathbf{n} = n_x\,\mathbf{i} + n_y\,\mathbf{j}$, entonces tenemos que, aplicando el teorema de Cauchy,

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para aplicar las condiciones de borde en los extremos de la barra aplicamos el principio de Saint-Venant y suponemos, en consecuencia, que la resultante de las fuerzas que actúan en cada una de ellas debe ser igual a la carga P aplicada. Tomemos entonces un punto genérico de coordenadas (x, y) sobre el extremo $z = L$ de la barra. Tratándose de un punto sobre un plano cuya normal es el eje z, los esfuerzos que actúan sobre un elemento de área dA en el punto de coordenadas (x, y, L) son σ_z, τ_{zx} y τ_{zy}, como se observa en la Fig. 6.6.

La fuerza resultante generada por estos esfuerzos debe ser entonces igual a la carga axial externa P:

$$\sum F_x = \int_A \tau_{zx} dA \equiv 0 \tag{6.18a}$$

$$\sum F_y = \int_A \tau_{zy} dA \equiv 0 \tag{6.18b}$$

$$\sum F_z = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z \int_A dA = \sigma_z A = P \tag{6.18c}$$

De igual manera, el momento resultante con respecto al origen generado por esta distribución de esfuerzos debe ser nulo:

$$\sum M_x = \int_A y\sigma_z dA = \sigma_z \int_A y dA = 0 \tag{6.18d}$$

$$\sum M_y = -\int_A x\sigma_z dA = -\sigma_z \int_A x dA = 0 \tag{6.18e}$$

$$\sum M_z = \int_A (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dA \equiv 0 \tag{6.18f}$$

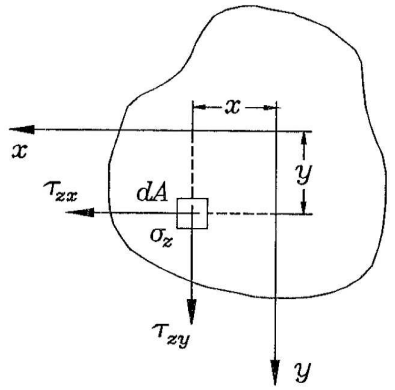


Figura 6.6 Esfuerzos en el extremo $z = L$.

Las Ecs. (6.18a), (6.18b) y (6.18f) se satisfacen idénticamente en todo punto de la superficie.

De la Ec. (6.18c) tenemos que

$$\sigma_z = \frac{P}{A} \tag{6.19}$$

donde A es el área de la sección transversal de la barra.

Desarrollando las Ecs. (6.18d) y (6.18e) y haciendo uso de la Ec. (6.19) tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_z \int_A y dA &= \sigma_z \bar{y} A = P\bar{y} = 0 \\ -\sigma_z \int_A x dA &= -\sigma_z \bar{x} A = -P\bar{x} = 0 \end{aligned} \tag{6.20}$$

donde

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_A x dA, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_A y dA$$

son las coordenadas del centroide de la sección transversal. Como $P \neq 0$, concluimos que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, lo cual implica que todas las hipótesis sobre la distribución de esfuerzos son correctas siempre que la línea de acción de las cargas aplicadas pase por el centroide de cada sección transversal de la barra.

La matriz de esfuerzos en cada punto de la barra viene dada entonces por

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P/A \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Las deformaciones que experimenta la barra pueden obtenerse utilizando las ecuaciones constitutivas (5.6) para obtener

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -\nu P/EA & 0 & 0 \\ 0 & -\nu P/EA & 0 \\ 0 & 0 & P/EA \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

Para determinar los desplazamientos que experimenta la barra sustituimos las deformaciones (6.22) en las relaciones deformación desplazamiento (5.7) para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu P}{EA} \tag{6.23a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu P}{EA} \tag{6.23b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{P}{EA} \tag{6.23c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{6.23d}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{6.23e}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{6.23f}$$

Integrando las tres primeras ecuaciones tenemos

$$u = -\frac{\nu P}{EA}\, x + f(y,z) \tag{6.24a}$$

$$v = -\frac{\nu P}{EA}\, y + g(x,z) \tag{6.24b}$$

$$w = \frac{P}{EA}\, z + h(x,y) \tag{6.24c}$$

donde $f(y,z)$, $g(x,z)$ y $h(x,y)$ son funciones desconocidas.

Sustituyendo las Ecs. (6.24a) y (6.24b) en la Ec. (6.23d) tenemos

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} + \frac{\partial g(x,z)}{\partial x} = 0$$

Esta ecuación implica que tanto $\partial f/\partial y$ como $\partial g/\partial x$ tienen que ser constantes. En efecto, si se produce, por ejemplo, una variación en x manteniendo y constante, $\partial g/\partial x$ variaría mientras que $\partial f/\partial y$ se mantendría constante; la suma $\partial f/\partial y + \partial g/\partial x$ variaría, lo cual se contradice con la hipótesis de que la suma de estas derivadas es constantemente nula. Luego $\partial f/\partial y$ y $\partial g/\partial x$ tienen que ser constantes, siendo su suma igual a 0. Sea entonces

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = B, \qquad \frac{\partial g(x,z)}{\partial x} = -B$$

donde B es una constante. Integrando ambas expresiones obtenemos

$$f(y,z) = By + \phi(z) \tag{6.25a}$$

$$g(x,z) = -Bx + \varphi(z) \tag{6.25b}$$

donde $\phi(z)$ y $\varphi(z)$ son ambas funciones desconocidas de z.

Sustituyendo ahora las Ecs. (6.24a), (6.24c) y (6.25a) en la Ec. (6.23e) obtenemos que

$$\phi'(z) + \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = 0$$

Por un razonamiento similar al de antes se concluye que tanto $\phi'(z)$ como $\partial h/\partial x$ tienen que ser constantes. Sea entonces

$$\phi'(z) = C, \qquad \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = -C$$

donde C es una constante. Integrando se tiene

$$\phi(z) = Cz + D \tag{6.26a}$$

$$h(x,y) = -Cx + \psi(y) \tag{6.26b}$$

donde D es una constante y $\psi(y)$ es una función.

Por último, sustituyendo las Ecs. (6.24b), (6.24c), (6.25b) y (6.26b) en la Ec. (6.23f) se tiene

$$\varphi'(z) + \psi'(y) = 0$$

De esta ecuación se concluye de nuevo que tanto $\varphi'(z)$ como $\psi'(y)$ tienen que ser constantes. Entonces

$$\varphi'(z) = F, \qquad \psi'(y) = -F$$

donde F es una constante. Luego

$$\varphi(z) = Fz + G \tag{6.27a}$$

$$\psi(y) = -Fy + H \tag{6.27b}$$

donde G y H son constantes.

Sustituyendo las Ecs. (6.25), (6.26) y (6.27) en las Ecs. (6.24) obtenemos finalmente

$$u = -\frac{\nu P}{EA}x + By + Cz + D$$

$$v = -\frac{\nu P}{EA}y - Bx + Fz + G$$

$$w = \frac{P}{EA}z - Cx - Fy + H$$

Imponiendo ahora las condiciones de borde $\mathbf{s}(0, 0, 0) = \mathbf{0}$ y $\omega(0, 0, 0)$ se obtiene

$$u = -\frac{\nu P}{EA}x$$

$$v = -\frac{\nu P}{EA}y \tag{6.28}$$

$$w = \frac{P}{EA}z$$

6.4 Flexión de Vigas

Ahora analizaremos la distribución de esfuerzos en una barra de longitud l y sección transversal arbitraria sometida a sendos momentos flectores M en sus extremos, tal como se muestra en la Fig. 6.7.

Si la barra se visualiza como compuesta por largas fibras longitudinales, puede entonces suponerse que únicamente actúan esfuerzos normales σ_z en la dirección axial de la barra. Si se supone además que las secciones transversales permanecen planas después de aplicar el momento flector, que es la conocida hipótesis de Bernoulli-Navier para las vigas, puede postularse que las deformaciones varían linealmente con las coordenadas (x, y) que definen la ubicación de una fibra genérica. Ahora, como la relación entre los esfuerzos y las deformaciones es lineal, podemos entonces escribir

$$\sigma_z = ax + by + c$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{6.29}$$

Despreciando las fuerzas de volumen, puede comprobarse fácilmente que estás ecuaciones satisfacen las ecuaciones de equilibrio (5.1) y las de compatibilidad (5.9) de Beltrami-Michell.

Como la superficie lateral de la barra está libre de cargas, debe verificarse que $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$ para todo punto $\mathbf{r}$ de dicha superficie. En efecto, como en la superficie lateral $\mathbf{n} = n_x\,\mathbf{i} + n_y\,\mathbf{j}$, entonces tenemos que, aplicando el teorema de Cauchy,

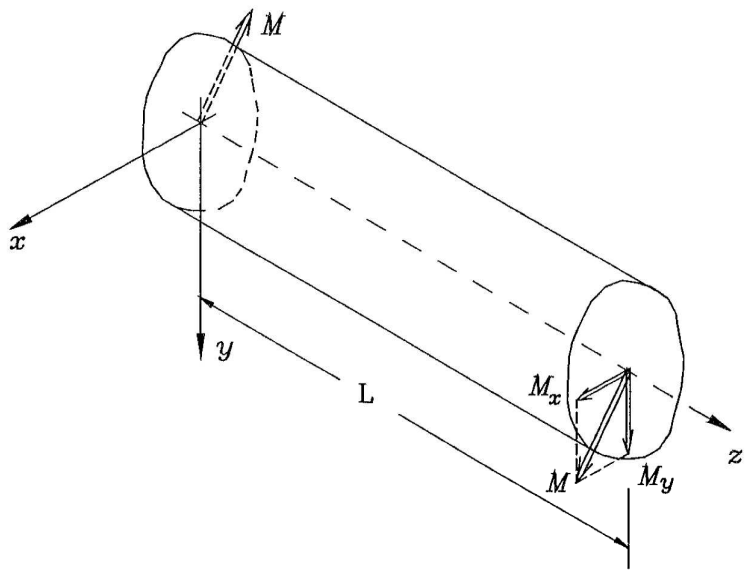


Figura 6.7 Barra sometida a flexión pura

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para aplicar las condiciones de borde en los extremos de la barra aplicamos el principio de Saint-Venant y suponemos, en consecuencia, que la resultante de las fuerzas que actúan en cada una de ellas debe ser igual al momento M aplicado. Tomemos entonces un punto genérico de coordenadas (x, y) sobre el extremo $z = L$ de la barra. Tratándose de un punto sobre un plano cuya normal es el eje z, los esfuerzos que actúan sobre un elemento de área dA en el punto de coordenadas (x, y, L) son σ_z, τ_{zx} y τ_{zy}, como se observa en la Fig. 6.6. La fuerza resultante generada por estos esfuerzos debe ser nula:

$$\sum F_x = \int_A \tau_{xz} dA \equiv 0 \tag{6.30a}$$

$$\sum F_y = \int_A \tau_{yz} dA \equiv 0 \tag{6.30b}$$

$$\sum F_z = \int_A \sigma_z dA = \int_A (ax + by + c) dA = 0 \tag{6.30c}$$

De igual manera, el momento resultante con respecto al origen generado por esta distribución de esfuerzos debe ser igual al momento M aplicado, el cual puede, obviamente, ser resuelto en dos componentes:

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}$$

Entonces, tomando momentos con respecto a los ejes x, y y z tenemos:

$$\sum M_x = \int_A y\sigma_z dA = \int_A (axy + by^2 + cy) dA = M_x \tag{6.30d}$$

$$\sum M_y = -\int_A x\sigma_z dA = -\int_A (ax^2 + bxy + cx) dA = M_y \tag{6.30e}$$

$$\sum M_z = \int_A (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dA \equiv 0 \tag{6.30f}$$

Las Ecs. (6.30a), (6.30b) y (6.30f) se satisfacen idénticamente en todo punto de la superficie.

De la Ec. (6.30c) tenemos

$$a\int_A x dA + b\int_A y dA + cA = 0$$

donde A es el área de la sección transversal de la barra.

Suponiendo que el eje z pasa por el centroide de cada sección transversal, se tiene que

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_A x dA = 0, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_A y dA = 0,$$

Luego $cA = 0$. Pero como el área de la sección transversal no es nula, entonces $c = 0$.

De las Ecs. (6.30d) y (6.30e) tenemos

$$\begin{cases} M_x = a\int_A xy dA + b\int_A y^2 dA = aI_{xy} + bI_x \\ M_y = a\int_A x^2 dA + b\int_A xy dA = aI_y + bI_{xy} \end{cases} \tag{6.31}$$

donde

$$I_x = \int_A y^2 dA, \qquad I_y = \int_A x^2 dA, \qquad I_{xy} = \int_A xy dA \tag{6.32}$$

son los momentos de inercia de la sección transversal con respecto a los ejes x y y.

Resolviendo las Ecs. (6.31) para las constantes a y b y sustituyendo en (6.29) obtenemos

$$\sigma_z = \left(\frac{M_x I_{xy} + M_y I_x}{I_{xy}^2 - I_x I_y}\right)x - \left(\frac{M_y I_{xy} + M_x I_y}{I_{xy}^2 - I_x I_y}\right)y \tag{6.33}$$

que es la llamada *fórmula general de flexión*.

Obsérvese que, dependiendo de los valores que tomen las coordenadas (x, y), el esfuerzos σ_z puede ser positivo o negativo. Como la distribución de esfuerzos es lineal, esto significa que existe una zona donde las fibras están sometidas a tracción y otra donde los esfuerzos son de compresión. El límite entre estas dos zonas se obtiene haciendo $\sigma_z = 0$ en la Ec. (6.33) para obtener la ecuación de la recta

$$y = \left(\frac{M_x I_{xy} + M_y I_x}{M_y I_{xy} + M_x I_y}\right) x \tag{6.34}$$

llamada *eje neutro*. Todos los puntos ubicados sobre esta recta están libres de esfuerzos, mientras que el esfuerzo máximo se genera en el punto más alejado de este eje. Moviendo esta recta a lo largo del eje de la viga obtenemos un plano denominado *plano neutro*.

Si los ejes x y y son ejes principales de inercia, entonces $I_{xy} = 0$ y la Ec. (6.33) queda como

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \tag{6.35}$$

mientras que la ecuación del eje neutro es

$$y = \left(\frac{M_y I_x}{M_x I_y}\right) x \tag{6.36}$$

Por último, si la dirección del momento flector aplicado coincide con uno de los ejes coordenados, como el eje x, por ejemplo, entonces obtenemos la fórmula elemental de flexión

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \tag{6.37}$$

mientras que el eje neutro queda definido por la recta $y = 0$.

Como ejercicio el lector puede usar este último resultado para determinar los desplazamientos que experimenta la barra siguiendo el procedimiento utilizado en la sección anterior. En efecto, sustituyendo la Ec. (6.37) en las ecuaciones constitutivas (5.6) se pueden obtener las deformaciones. Sustituyendo después estas deformaciones en las relaciones deformación-desplazamiento (5.2), integrando e imponiendo las condiciones de borde $\mathbf{s}(0, 0, 0) = \mathbf{0}$ y $\omega(0, 0, 0) = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nu M_x}{EI_x} xy \\ v &= \frac{M_x}{2EI_x}(\nu x^2 - \nu y^2 - z^2) \\ w &= \frac{M_x}{EI_x} yz \end{aligned} \tag{6.38}$$

Una cuestión interesante y de variadas aplicaciones consiste en la determinación de los desplazamientos de los puntos localizados sobre el eje de la viga. A tal fin hacemos $x = y = 0$ en las Ecs. (6.38) para obtener

$$\begin{aligned} v &= -\frac{M_x z^2}{2EI_x} \\ u &= w = 0 \end{aligned} \tag{6.39}$$

Concluimos entonces que los puntos localizados sobre el eje de la viga se desplazan verticalmente en el plano yz describiendo una parábola en su configuración final deformada.

Derivando dos veces la Ec. (6.39) con respecto a z obtenemos

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x} \tag{6.40}$$

En las aplicaciones prácticas esta ecuación se utiliza como una ecuación diferencial con condiciones de borde que sirve para obtener los desplazamientos de una viga cuando el momento flector M_x es variable a lo largo de la viga y constituye la base del denominado *método de la doble integración* para el cálculo de deflexiones en vigas. A la expresión v que se obtiene para estas deflexiones al integrar la Ec. (6.40) se le llama *curva elástica*.

6.5 Torsión de una Barra de Sección Circular

Analizaremos ahora la distribución de esfuerzos en una barra sometida a un momento cuya dirección coincide con su eje. A un momento de esta naturaleza se le llama *momento torsor* y la barra se dice que está sometida a *torsión*. Como veremos, este problema es mucho más complejo que el de una barra sometida a flexión y, para abordarlo, comenzaremos por analizar el caso más simple, que es justamente el de una barra de sección circular, el cual tiene múltiples aplicaciones en el diseño de máquinas.

Consideremos entonces una barra de sección transversal circular, de radio R y longitud L, sometida a un momento torsor M_t en el extremo $z = L$, como se muestra en la Fig. 6.8. Supongamos que el extremo $z = 0$ de la barra está fijo.

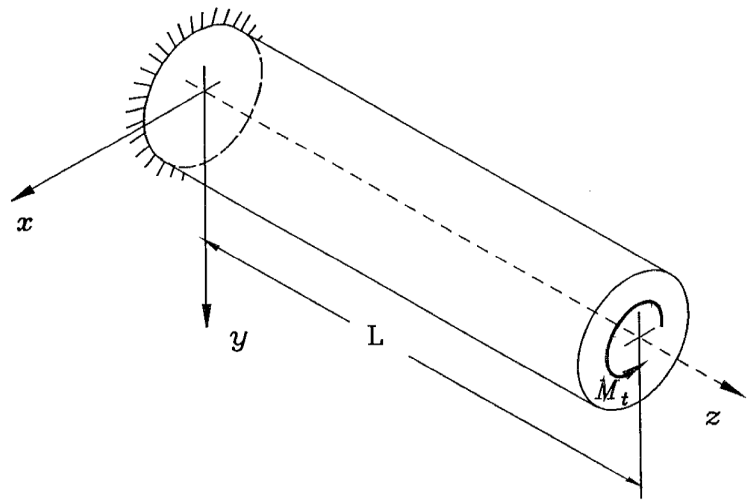


Figura 6.8 Barra de sección circular sometida a torsión

Para resolver este problema usaremos de nuevo el método semi-inverso pero esta vez nuestras hipótesis estarán basadas esencialmente en la geometría de la deformación de la barra.

Por efecto del momento torsor M_t cada una de las secciones transversales de la barra gira con relación al extremo fijo en $z = 0$, mientras que las generatrices del cilindro se deforman en curvas helicoidales. Puede comprobarse experimentalmente que en el caso de una barra cilíndrica de base circular las secciones transversales de la barra permanecen planas después de aplicado el momento, experimentando cada una de ellas simplemente una rotación $\theta(z)$ con respecto al eje de la barra. Puede comprobarse también que el radio de la barra no varía. Como se ha supuesto que el extremo localizado en $z = 0$ está fijo, esta rotación será nula en este extremo y crecerá hasta un valor máximo en el extremo $z = L$.

Con base en estas consideraciones preliminares, pasamos ahora a postular unas expresiones analíticas para los desplazamientos u, v y w de un punto genérico $P(x, y, z)$ de la barra.

En primer lugar, si suponemos que las secciones transversales permanecen planas, entonces el desplazamiento axial w de cualquier punto de la barra es nulo. Postulamos entonces que

$$w(x, y, z) \equiv 0 \tag{6.41}$$

para todo punto $P(x, y, z)$ de la barra.

A fin de plantear expresiones analíticas para los desplazamientos u y v, consideramos una sección transversal genérica localizada a una distancia z del extremo $z = 0$. Sea $\theta(z)$ la rotación de esta sección genérica y sea r la distancia radial desde el eje z hasta el punto genérico $P(x, y, z)$ ubicado sobre esta sección. Como el radio de la barra se mantiene constante, al aplicarse el momento torsor M_t el punto $P(x, y, z)$ se mueve sobre un arco de circunferencia de radio r y longitud $r\theta(z)$, pasando a ocupar la nueva posición $P'(x+u, y+v, z)$, como se observa en la Fig. 6.9. De la geometría de esta figura tenemos

$$u = -[r\cos\beta - r\cos(\beta + \theta)]$$
$$v = r\,\mathrm{sen}\,(\beta + \theta) - r\,\mathrm{sen}\,\beta$$

donde β es el ángulo que forma el radio r con el eje x

Aplicando ahora las fórmulas del seno y coseno de la suma de dos ángulos, obtenemos

$$u = r\cos\beta\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\cos\beta$$
$$v = r\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\theta + r\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}\,\beta$$

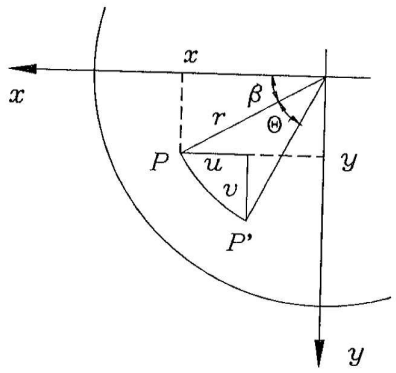


Figura 6.9 Desplazamientos de un punto $P(x, y, z)$ de la sección transversal.

Considerando que los desplazamientos son pequeños y que, por lo tanto, $\cos\theta \approx 1$ y $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, tenemos

$$u = r\cos\beta - \theta r \operatorname{sen}\beta - r\cos\beta = -\theta r \operatorname{sen}\beta$$
$$v = r\operatorname{sen}\beta + \theta r\cos\beta - r\operatorname{sen}\beta = \theta r\cos\beta$$

Es decir

$$u = -\theta y$$
$$v = \theta x$$

Este resultado, en conjunto con la Ec. (6.41), nos llevan a proponer el siguiente campo de desplazamientos, en términos de la función desconocida $\theta(z)$, para una barra de sección circular sometida a torsión:

$$\begin{aligned} u &= -y\,\theta(z) \\ v &= x\,\theta(z) \\ w &\equiv 0 \end{aligned} \tag{6.42}$$

Usando ahora las relaciones deformación-desplazamiento (2.22), y designando con

$$\alpha = \frac{d\theta}{dz} \tag{6.43}$$

a la rotación por unidad de longitud, obtenemos las componentes de la matriz de deformaciones

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left[-\theta(z) + \theta(z)\right] = 0$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}y\frac{d\theta}{dz} = -\frac{1}{2}y\alpha$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}x\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2}x\alpha$$

Aplicando las ecuaciones constitutivas (3.26), obtenemos las componentes de la matriz de esfuerzos

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{xz} = \frac{E}{1+\nu}\gamma_{xz} = -Gy\alpha \tag{6.44}$$
$$\tau_{yz} = \frac{E}{1+\nu}\gamma_{yz} = Gx\alpha$$

donde G es el módulo de corte.

Puede comprobarse fácilmente que estas componentes satisfacen las ecuaciones de equilibrio (5.1), de manera que solo nos restaría analizar las condiciones de borde del problema. En primer lugar, como la superficie lateral de la barra está libre de cargas, debe verificarse que $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$ para todo punto $\mathbf{r}$ de dicha superficie. En efecto, como en la superficie lateral $\mathbf{n} = n_x\,\mathbf{i} + n_y\,\mathbf{j}$, entonces tenemos que, aplicando el teorema de Cauchy,

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma\cdot\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Gy\alpha \\ 0 & 0 & Gx\alpha \\ -Gy\alpha & Gx\alpha & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G\alpha(xn_y - yn_x) \end{bmatrix} \tag{6.45}$$

Como la seccion transversal es circular, entonces el vector normal puede escribirse como (ver Fig. 6.10)

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} = \cos\beta\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\beta\mathbf{j} = \frac{1}{R}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (6.45), comprobamos que, efectivamente, la superficie lateral está libre de cargas:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G\alpha[x(y/R) - y(x/R)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

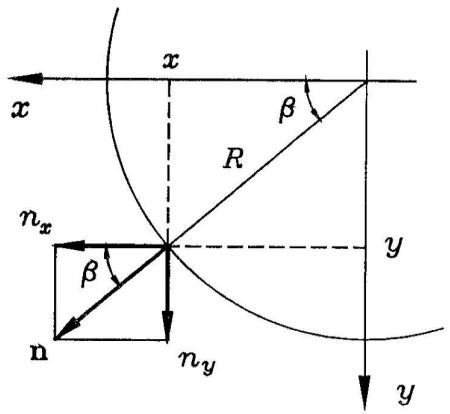


Figura 6.10 Componentes del vector normal en la superficie lateral.

Para aplicar las condiciones de borde en los extremos de la barra aplicamos el principio de Saint-Venant y suponemos, en consecuencia, que la resultante de las fuerzas que actúan en cada una de ellas debe ser igual al momento torsor M_t aplicado. Tomemos entonces un punto genérico de coordenadas (x, y, L) sobre el extremo $z = L$ de la barra. Tratándose de un punto sobre un plano cuya normal es el eje z, los esfuerzos que actúan sobre un elemento de área dA en el punto de coordenadas (x, y, L) son σ_z, τ_{zx} y τ_{zy}, como se observa en la Fig. 6.6.

La fuerza resultante generada por estos esfuerzos debe ser nula:

$$\sum F_x = \int_A \tau_{xz}\,dA = \int_A -G y\alpha\,dA = -G\alpha\int_A y\,dA = 0 \qquad (6.46a)$$

$$\sum F_y = \int_A \tau_{yz}\,dA = \int_A G x\alpha\,dA = G\alpha\int_A x\,dA = 0 \qquad (6.46b)$$

$$\sum F_z = \int_A \sigma_z\,dA \equiv 0 \qquad (6.46c)$$

De igual manera, el momento resultante con respecto al origen generado por esta distribución de esfuerzos debe ser igual al momento torsor M_t aplicado. Entonces, tomando momentos con respecto a los ejes x, y y z tenemos:

$$\sum M_x = \int_A y\sigma_z\,dA \equiv 0 \qquad (6.46d)$$

$$\sum M_y = -\int_A x\sigma_z\,dA \equiv 0 \qquad (6.46e)$$

$$\sum M_z = \int_A (x\tau_{zy} - y\tau_{zx})\,dA = G\alpha\int_A (x^2 + y^2)\,dA = M_t \qquad (6.46f)$$

Como $\sigma_z \equiv 0$, las Ecs. (6.46c), (6.46d) y (6.46e) se satisfacen idénticamente en todo punto de la superficie.

Suponiendo que el eje z pasa por el centroide de cada sección transversal se tiene que

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_A x\,dA = 0, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_A y\,dA = 0,$$

Luego las Ecs. (6.46a) y (6.62b) también se satisfacen.

De la Ec. (6.46f) tenemos

$$M_t = G\alpha\int_A (x^2 + y^2)\,dA = G\alpha J \qquad (6.47)$$

donde

$$J = \int_A (x^2 + y^2)\,dA = \int_A r^2\,dA = \frac{1}{2}\pi R^4 \qquad (6.48)$$

es el *momento polar de inercia* de la sección transversal.

De la Ec. (6.47) tenemos que la rotación por unidad de longitud viene dada por

$$\alpha = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_t}{GJ} \tag{6.49}$$

Como M_t, G y J son constantes, α debe también ser constante, de donde concluimos que $\theta(z)$ es una función lineal de la variable z:

$$\theta = \frac{M_t}{GJ} z + constante$$

Ahora bien, como el extremo $z = 0$ está fijo, $\theta(0) = 0$, de donde finalmente concluimos que

$$\theta = \frac{M_t}{GJ} z \tag{6.50}$$

La Ec. (6.47) suele también escribirse como

$$M_t = D\alpha \tag{6.51}$$

donde en D es la llamada *rigidez torsional*. En el caso de una barra de sección circular esta rigidez vale

$$D = GJ \tag{6.52}$$

Sustituyendo la Ec. (6.47) en la Ec. (6.44) obtenemos finalmente la matriz de esfuerzos en un punto genérico $P(x, y, z)$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_t}{J} y \\ 0 & 0 & \frac{M_t}{J} x \\ -\frac{M_t}{J} y & \frac{M_t}{J} x & 0 \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

En la Fig. 6.11 se han representado gráficamente estos esfuerzos en una sección genérica de la barra. El esfuerzo de corte resultante es

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{\left(-\frac{M_t y}{J}\right)^2 + \left(\frac{M_t x}{J}\right)^2} = \frac{M_t}{J}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Esto es

$$\tau = \frac{M_t r}{J} \tag{6.54}$$

Para cada punto, este esfuerzo de corte resultante es ortogonal al radio vector r que va desde el origen (0, 0, z) al punto $P(x, y, z)$, como se observa en la Fig. 6.11. En efecto,

$$\mathbf{r} \circ (\tau_{xz}\mathbf{i} + \tau_{yz}\mathbf{j}) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \circ (-\frac{M_t}{J} y\,\mathbf{i} + \frac{M_t}{J} x\,\mathbf{j}) = \frac{M_t}{J}(-xy + xy) = 0$$

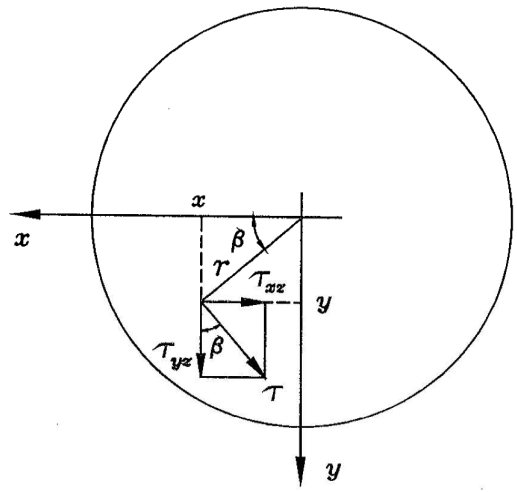


Figura 6.11 Esfuerzos cortantes en una sección genérica de la barra

De la Ec. (6.54) concluimos que el esfuerzo de corte resultante varía linealmente desde cero en el origen hasta un valor máximo en la superficie exterior de la barra (ver Fig. 6.12). Este valor máximo del esfuerzo de corte es

$$\tau_{máx} = \frac{M_t R}{\pi R^4/2} = \frac{2M_t}{\pi R^3} \tag{6.55}$$

Para verificar la resistencia de la barra consideramos un punto genérico en la superficie exterior de coordenadas $x = R\cos\beta$ y $y = R\,\text{sen}\beta$ (ver Fig. 6.11). Sustituyendo estas coordenadas en la Ec. (6.53) obtenemos la matriz de esfuerzos en este punto genérico como

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{M_t}{J} R\,\text{sen}\,\beta \\ 0 & 0 & \frac{M_t}{J} R\cos\beta \\ -\frac{M_t}{J} R\,\text{sen}\,\beta & \frac{M_t}{J} R\cos\beta & 0 \end{bmatrix}$$

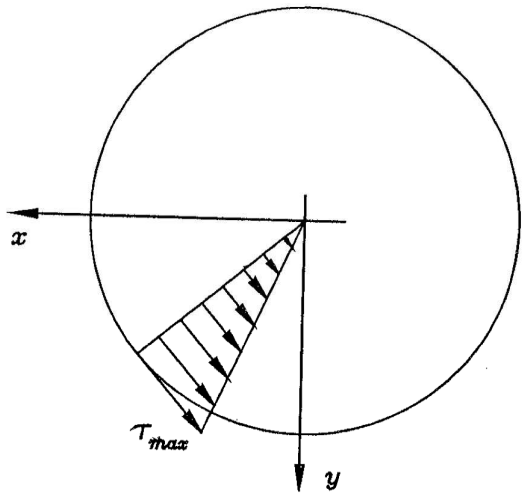


Figura 6.12 Distribución del esfuerzo cortante

Los esfuerzos principales se obtienen como las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{M_t}{J} R\,\text{sen}\,\beta \\ 0 & -\lambda & \frac{M_t}{J} R\cos\beta \\ -\frac{M_t}{J} R\,\text{sen}\,\beta & \frac{M_t}{J} R\cos\beta & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante tenemos

$$-\lambda^3 + \lambda\left(\frac{M_t R}{J}\right)^2 \text{sen}^2\,\beta + \lambda\left(\frac{M_t R}{J}\right)^2 \cos^2\beta = 0$$

Es decir

$$\lambda\left(\lambda^2 - \tau_{máx}^2\right) = 0$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\tau_{máx} = -\frac{2M_t}{\pi R^3} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= \tau_{máx} = \frac{2M_t}{\pi R^3} \end{aligned} \tag{6.56}$$

El diagrama de Mohr para este estado de esfuerzos se observa en la Fig. 6.13. Si el material es de naturaleza frágil podemos aplicar la teoría deRankine. El esfuerzo principal máximo actúa en un plano cuya normal forma 45° con el eje z. Para que la barra no falle, este esfuerzo debe ser inferior a la resistencia a la tracción del material

$$\sigma_3 = \frac{2M_t}{\pi R^3} \le S_{tt}$$

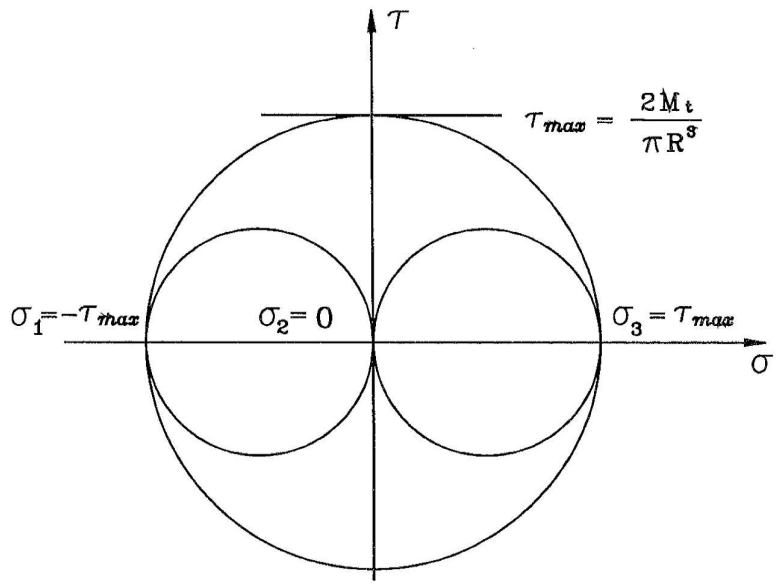


Figura 6.13 Diagrama de Mohr para un punto genérico de la barra

El esfuerzo principal mínimo actúa en un plano cuya normal forma 135° con el eje z. Para que la barra no falle, este esfuerzo debe ser inferior a la resistencia a la compresión del material

$$|\sigma_1| = \frac{2M_t}{\pi R^3} \leq S_{uc}$$

Como generalmente la resistencia a la tracción de una material frágil es menor que la resistencia a la compresión, podemos concluir que para que la barra no falle debe cumplirse que

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{2M_t}{\pi S_{ut}}} \tag{6.57}$$

Si el material es de naturaleza dúctil, podemos entonces aplicar la teoría de Tresca o la de von Mises. Si aplicamos la de Tresca tendríamos que

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{2M_t}{\pi R^3} \leq \frac{S_y}{2}$$

Luego, para que el material no falle

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{4M_t}{\pi S_y}} \tag{6.58}$$

Si aplicamos la teoría de von Mises, tendríamos

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{2M_t}{\pi R^3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2M_t}{\pi R^3} + \frac{2M_t}{\pi R^3}\right)^2 + \left(-\frac{2M_t}{\pi R^3} - 0\right)^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} S_y$$

Es decir

$$\frac{2M_t}{\pi R^3} \leq \frac{S_y}{\sqrt{3}}$$

De aquí se concluye que para que el material no falle

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}M_t}{\pi S_y}} \tag{6.59}$$

Por último, si sustituimos la Ec. (6.50) en las expresiones (6.42), obtenemos el campo de desplazamientos para la barra

$$\begin{aligned} u &= -\frac{M_t}{GJ} yz \\ v &= \frac{M_t}{GJ} xz \\ w &\equiv 0 \end{aligned} \tag{6.60}$$

6.6 Torsión de una Barra de Sección Arbitraria

Como se dijo en la sección anterior, el análisis de esfuerzos en una barra sometida a torsión es un problema mucho más complejo que el problema de flexión. Por esta razón comenzamos en la sección anterior con el caso sencillo de una barra de sección circular, pero ahora abordaremos el problema de una manera general para una barra de sección arbitraria como la mostrada en la Fig. 6.14. De nuevo suponemos que la barra está fija en el extremo $z = 0$ y sometida a un momento torsor M_t en su otro extremo $z = L$.

Si partimos de un campo de desplazamientos como el propuesto en la sección anterior para una barra de sección circular mediante las expresiones (6.42), los esfuerzos vendrían dados por las Ecs. (6.44) y el vector esfuerzo en la superficie lateral sería

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\gamma\alpha \\ 0 & 0 & G\chi\alpha \\ -G\gamma\alpha & G\chi\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G\alpha(\chi n_y - \gamma n_x) \end{bmatrix}$$

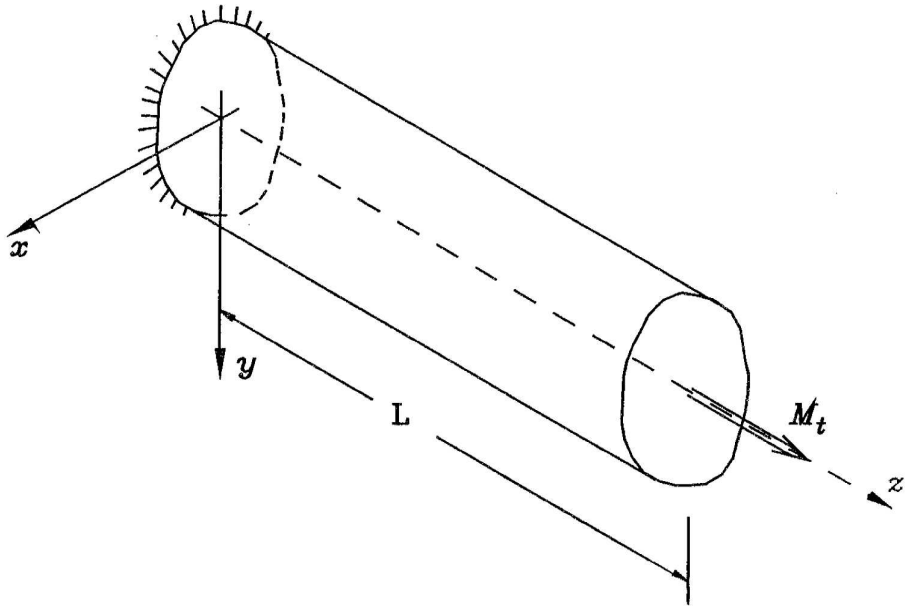


Figura 6.14 Barra de sección arbitraria sometida a torsión

De la Fig. 6.15 tenemos que

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} = \cos\beta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\beta\mathbf{j} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j} \qquad (6.61$$

Luego

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G\alpha(\chi n_y - \gamma n_x) \end{bmatrix} = -G\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi\dfrac{dx}{ds} + \gamma\dfrac{dy}{ds} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}G\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{d}{ds}(\chi^2 + \gamma^2) \end{bmatrix}$$

Entonces, para que la superficie lateral esté libre de esfuerzos debe cumplirse que

$$\frac{d}{ds}(\chi^2 + \gamma^2) = 0$$

Pero esto es cierto solo si las coordenadas del perímetro de la barra l cumplen con la ecuación $\chi^2 + \gamma^2$ = constante, que es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen. Esto significa que las barras de sección transversal circular son las únicas que pueden presentar una distribución de desplazamientos como la expresada por las Ecs. (6.42) y, al mismo tiempo, satisfacer las condiciones de borde en la superficie lateral.

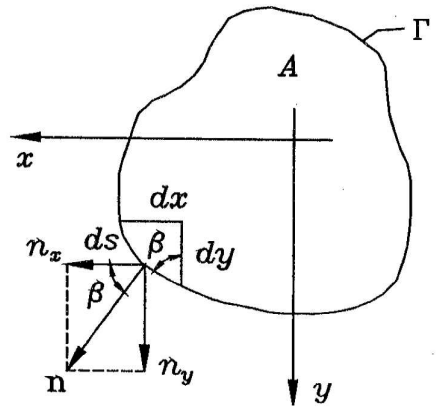


Figura 6.15 Componentes del vector normal en la superficie lateral

En efecto, puede comprobarse experimentalmente que en las barras de sección transversal no circular los planos perpendiculares al eje z no permanecen planos después de aplicar el momento torsor, sino que se alabean de manera que todos los puntos localizados sobre una determinada recta paralela al eje de la barra experimentan un mismo desplazamiento longitudinal que depende de la localización de la recta con respecto al eje z. Es decir, el desplazamiento axial w de cada punto $P(x, y, z)$ de la barra no depende de z sino de las coordenadas x y y.

Propongamos entonces el siguiente campo de desplazamientos para una barra de sección arbitraria sometida a torsión

$$\begin{aligned} u &= -y\theta(z) \\ v &= x\theta(z) \\ w &= w(x,y) \end{aligned} \tag{6.62}$$

donde, como antes, $\theta(z)$ es la rotación de una sección genérica localizada a una distancia z del origen.

Entonces

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left[-\theta(z) + \theta(z)\right] = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(-y\frac{d\theta}{dz} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\alpha\right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(x\frac{d\theta}{dz} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\alpha\right)$$

donde $\alpha = d\theta/dz$ es la rotación por unidad de longitud.

Aplicando las ecuaciones constitutivas (3.26), obtenemos las componentes de la matriz de esfuerzos

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\alpha\right) \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{yz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\alpha\right) \end{aligned} \tag{6.63}$$

donde G es el módulo de corte.

Puede comprobarse fácilmente que esta distribución de esfuerzos satisface idénticamente las dos primeras ecuaciones de equilibrio (5.1) con fuerzas de volumen nulas. La sustitución de (6.63) en la tercera ecuación de equilibrio conduce a

$$G\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

O bien

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{6.64}$$

Es decir, las ecuaciones de equilibrio se satisfacen si el campo de desplazamientos $w(x, y)$ en la dirección del eje z satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 w = 0$ en todo punto de la sección transversal A.

Analicemos ahora las condiciones de borde del problema. En primer lugar, como la superficie lateral de la barra está libre de cargas, debe verificarse que $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$ para todo punto $\mathbf{r}$ de dicha superficie. En efecto, como en la superficie lateral $\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j}$, entonces tenemos que, aplicando el teorema de Cauchy,

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\alpha\right) \\ 0 & 0 & G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\alpha\right) \\ G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\alpha\right) & G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\alpha\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que este vector sea cero, en todo punto de la frontera de la sección transversal debe cumplirse que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\alpha\right) n_x + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\alpha\right) n_y = 0$$

Esto es

$$\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y = \alpha(y n_x - x n_y) \tag{6.65}$$

De los cursos de análisis vectorial sabemos que la derivada normal de un campo escalar puede expresarse como[55]

$$\frac{dw}{dn} = \nabla w \circ \mathbf{n} = \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y$$

mientras que de la Ec. (6.61) sabemos que el vector normal puede expresarse como (ver Fig. 6.15)

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} = \cos\beta\, \mathbf{i} + \operatorname{sen}\beta \mathbf{j} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (6.65) obtenemos

$$\frac{dw}{dn} = \alpha\left(y\frac{dy}{ds} + x\frac{dx}{ds}\right)$$

Es decir, en todo punto de la frontera Γ de la sección transversal debe cumplirse que

$$\frac{dw}{dn} = \frac{1}{2}\alpha\frac{d}{ds}(x^2 + y^2) \tag{6.66}$$

Dado que $w = w(x, y)$, de esta ecuación concluimos de nuevo que la rotación por unidad de longitud α debe ser constante y que, en consecuencia, la

[55] Ver, por ejemplo, el libro de F. B. Hildebrand, *"Advanced Calculus for Applications"*, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976, pág. 102.

rotación $\theta(z)$ que experimenta cada sección de la barra es una función lineal de la coordenada z. Sea entonces

$$w(x, y) = \alpha\varphi(x, y) \tag{6.67}$$

donde $\varphi(x, y)$ es una función denominada *función de alabeo*.

De esta definición concluimos, a partir de la Ec. (6.64), que la función de alabeo debe satisfacer también la ecuación diferencial

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.68}$$

mientras que la condición de borde (6.66) queda como

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2 + y^2) \tag{6.69}$$

Los esfuerzos en la sección transversal vienen dados por

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) \\ \tau_{yz} &= G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) \end{aligned} \tag{6.70}$$

El problema de la torsión de una barra de sección no circular se reduce así a la determinación de una función de alabeo $\varphi(x, y)$ que es armónica en una región plana y cuya derivada normal $d\varphi/dn$ se conoce en la frontera de esa región.

Si designamos con A a la región ocupada por la sección transversal de la barra y con Γ a su frontera o contorno, tenemos entonces el siguiente problema de valor en la frontera

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi(x, y) = 0 & \text{en } A \\ \dfrac{d\varphi}{dn} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}(x^2 + y^2) & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \tag{6.71}$$

Examinemos ahora las condiciones de borde en el extremo $z = L$ de la barra. De nuevo, aplicando el principio de Saint-Venant concluimos que la fuerza resultante generada por la distribución de esfuerzos (6.70) debe ser nula

$$\sum F_x = \int_A \tau_{xz} dA = \int_A G\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) dA = G\alpha \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) dA = 0 \qquad (6.72a)$$

$$\sum F_y = \int_A \tau_{yz} dA = \int_A G\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) dA = G\alpha \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) dA = 0 \qquad (6.72b)$$

$$\sum F_z = \int_A \sigma_z dA \equiv 0 \qquad (6.72c)$$

De igual manera, el momento resultante con respecto al origen generado por esta distribución de esfuerzos debe ser igual al momento torsor M_t aplicado. Entonces, tomando momentos con respecto a los ejes x, y y z tenemos:

$$\sum M_x = \int_A y\sigma_z dA \equiv 0 \qquad (6.72d)$$

$$\sum M_y = -\int_A x\sigma_z dA \equiv 0 \qquad (6.72e)$$

$$\sum M_z = \int_A (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dA = G\alpha \int_A \left[x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) - y\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)\right] dA = M_t \qquad (6.72f)$$

Como $\sigma_z \equiv 0$, las Ecs. (6.72c), (6.72d) y (6.72e) se satisfacen idénticamente en todo punto de la superficie.

Aprovechando la Ec. (6.68), podemos escribir la expresión (6.72a) como

$$\sum F_x = \int_A \tau_{xz} dA = G\alpha \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) dxdy = G\alpha \int_A \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y + x\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)\right] dxdy$$

$$= G\alpha \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right)\right] \right\} dxdy$$

Esta integral de superficie puede ser transformada en una integral de línea aplicando el teorema de Green en el plano[56] para dos campos escalares $P(x, y)$ y $Q(x, y)$

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma P dx + Q dy$$

Tenemos así que

$$\sum F_x = G\alpha \int_\Gamma \left\{ -\left[x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right)\right] dx + \left[x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)\right] dy \right\}$$

$$= G\alpha \int_\Gamma x\left[-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right)\frac{dy}{ds}\right] ds$$

$$= G\alpha \int_\Gamma x\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dy}{ds} - x\frac{dx}{ds} - y\frac{dy}{ds}\right] ds$$

$$= G\alpha \int_\Gamma x\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2 + y^2)\right] ds$$

$$= G\alpha \int_\Gamma x\left[\frac{d\varphi}{dn} - \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2 + y^2)\right] ds$$

$$= 0$$

De una manera similar puede procederse con la Ec. (6.72b) para demostrar que la resultante de fuerzas en la dirección y también es cero.

Por último, de la ecuación de equilibrio (6.72f) tenemos

$$M_t = G\alpha \int_A \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dxdy = D\alpha \qquad (6.73)$$

[56] Ver, por ejemplo, el libro de F. B. Hildebrand, *"Advanced Calculus for Applications"*, Second

donde

$$D = G\int_A \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dxdy \tag{6.74}$$

es la rigidez torsional.

Es posible demostrar que esta rigidez torsional puede también expresarse como

$$D = G\int_A \left[\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(y - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] dxdy \tag{6.75}$$

Una vez que se ha resuelto el problema (6.71) y se ha determinado la función de alabeo φ para una sección transversal específica, la rigidez torsional puede determinarse usando (6.74) o (6.75), para luego obtener la rotación por unidad de longitud $\alpha = M_t/D$. Entonces los esfuerzos pueden calcularse a partir de las Ecs. (6.70).

Aún cuando la función de alabeo tiene un significado geométrico bien claro y el procedimiento para obtenerla luce aparentemente simple, su determinación directa reviste en realidad grandes dificultades, sobre todo por la condición de frontera (6.69). Es por ello que, en su lugar, la formulación del problema general de torsión conviene plantearlo más bien en términos de los esfuerzos por medio de una función $\phi(x, y)$, denominada *función de esfuerzos de Prandtl*. Sea entonces $\phi(x, y)$ una función tal que

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\alpha\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= -G\alpha\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \tag{6.76}$$

Puede comprobarse fácilmente que esta distribución de esfuerzos satisface las ecuaciones de equilibrio (5.1) con fuerzas de volumen nulas. Sin embargo, del capítulo 2 sabemos que no toda distribución de esfuerzos que satisfaga las ecuaciones de equilibrio da lugar a un campo de desplazamientos coherente, a menos que las deformaciones correspondientes a esos esfuerzos satisfagan las ecuaciones de compatibilidad. En términos de esfuerzos estas ecuaciones de compatibilidad son justamente, como vimos en el capítulo 5, las ecuaciones de Beltrami-Michell. Entonces, a partir de la distribución (6.76) podemos

comprobar fácilmente que las cuatro primeras ecuaciones de compatibilidad (5.9) se satisfacen idénticamente considerando que las fuerzas de volumen son nulas, mientras que las dos últimas quedan como

$$\begin{aligned} \nabla^2\tau_{xz} &= \frac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial z^2} = G\alpha\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3\phi}{\partial y^3}\right) = 0 \\ \nabla^2\tau_{yz} &= \frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial z^2} = -G\alpha\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

De aquí concluimos que, a fin de que se satisfagan las ecuaciones de compatibilidad, el laplaciano de la función de esfuerzos de Prandtl debe ser constante en toda la región A ocupada por la sección transversal de la barra. En efecto, comparando las expresiones para los esfuerzos (6.70) y (6.76), tenemos las siguientes relaciones diferenciales entre la función de alabeo φ y la función de esfuerzos de Prandtl ϕ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \end{aligned} \tag{6.77}$$

Entonces

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - 1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - 1 = -2$$

De manera, pues, que en la región A se debe cumplir la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = -2 \tag{6.78}$$

La condición de borde en la superficie lateral puede expresarse ahora como

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G\alpha\dfrac{\partial\phi}{\partial y} \\ 0 & 0 & -G\alpha\dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ G\alpha\dfrac{\partial\phi}{\partial y} & -G\alpha\dfrac{\partial\phi}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Es decir

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}n_x - \frac{\partial\phi}{\partial x}n_y = 0$$

Esto es

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = 0$$

O bien

$$\frac{d\phi}{ds} = 0$$

De donde se concluye que sobre la frontera Γ la función de esfuerzos debe ser constante

En conclusión, para resolver el problema de la torsión de una barra de sección arbitraria debemos encontrar una función $\phi(x, y)$, tal que

$$\begin{cases} \nabla^2\phi(x,y) = -2 & en\ A \\ \phi = k & sobre\ \Gamma \end{cases} \tag{6.79}$$

La rotación por unidad de longitud viene dada por

$$\alpha = \frac{M_t}{D} \tag{6.80}$$

donde D es la rigidez torsional, la cual, a partir de las Ecs. (6.75) y (6.77) puede expresarse en términos de la función $\phi(x, y)$ como

$$D = G\int_A \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] dxdy \tag{6.81}$$

Una expresión más conveniente para esta rigidez torsional puede obtenerse si partimos de nuevo de la ecuación de equilibrio de momentos con respecto al eje z

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (x\tau_{zy} - y\tau_{zx})dxdy \\ &= \int_A \left(-G\alpha x\frac{\partial\phi}{\partial x} - G\alpha y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dxdy \\ &= -G\alpha\int_A \left(x\frac{\partial\phi}{\partial x} + y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dxdy \\ &= -G\alpha\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\phi) - 2\phi\right]dxdy \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo el teorema de Green en el plano a los primeros dos términos de esta integral, tenemos

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\phi)\right]dxdy = \int_\Gamma -y\phi dx + x\phi dy = -\int_\Gamma \phi\,(ydx - xdy)$$

Luego

$$M_t = 2G\alpha\int_A \phi\,dxdy + G\alpha\int_\Gamma \phi(ydx - xdy) \tag{6.82}$$

de donde

$$D = 2G\int_A \phi\,dxdy + G\int_\Gamma \phi(ydx - xdy) \tag{6.83}$$

La condición de borde en la superficie lateral puede expresarse ahora como

$$\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G\alpha \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ 0 & 0 & -G\alpha \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ G\alpha \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & -G\alpha \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Es decir

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} n_y = 0$$

Esto es

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = 0$$

O bien

$$\frac{d\phi}{ds} = 0$$

De donde se concluye que sobre la frontera Γ la función de esfuerzos debe ser constante

En conclusión, para resolver el problema de la torsión de una barra de sección arbitraria debemos encontrar una función $\phi(x, y)$, tal que

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi(x,y) = -2 & en\ A \\ \phi = k & sobre\ \Gamma \end{cases} \tag{6.79}$$

La rotación por unidad de longitud viene dada por

$$\alpha = \frac{M_t}{D} \tag{6.80}$$

donde D es la rigidez torsional, la cual, a partir de las Ecs. (6.75) y (6.77) puede expresarse en términos de la función $\phi(x, y)$ como

$$D = G \int_A \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy \tag{6.81}$$

Una expresión más conveniente para esta rigidez torsional puede obtenerse si partimos de nuevo de la ecuación de equilibrio de momentos con respecto al eje z

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dxdy \\ &= \int_A \left(-G\alpha x \frac{\partial \phi}{\partial x} - G\alpha y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy \\ &= -G\alpha \int_A \left(x\frac{\partial \phi}{\partial x} + y\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy \\ &= -G\alpha \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\phi) - 2\phi\right] dxdy \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo el teorema de Green en el plano a los primeros dos términos de esta integral, tenemos

$$\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\phi)\right] dxdy = \int_\Gamma -y\phi dx + x\phi dy = -\int_\Gamma \phi\ (ydx - xdy)$$

Luego

$$M_t = 2G\alpha \int_A \phi\, dxdy + G\alpha \int_\Gamma \phi(ydx - xdy) \tag{6.82}$$

de donde

$$D = 2G \int_A \phi\, dxdy + G \int_\Gamma \phi(ydx - xdy) \tag{6.83}$$

Como sobre el contorno ϕ es igual a una constante arbitraria, podemos escoger $\phi = 0$ sobre Γ. De manera que el problema (6.79) se escribe ahora como

$$\begin{cases} \nabla^2\phi(x,y) = -2 & en\ A \\ \phi = 0 & sobre\ \Gamma \end{cases} \tag{6.84}$$

con lo cual

$$D = 2G \int_A \phi\, dxdy \tag{6.85}$$

Ejemplo 6.1

Analizar la distribución de esfuerzos en una barra de sección elíptica sometida a torsión.

Solución:

Consideremos la sección elíptica de semiejes a y b mostrada en la Fig. 6.16. Como se sabe, la ecuación de esta elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

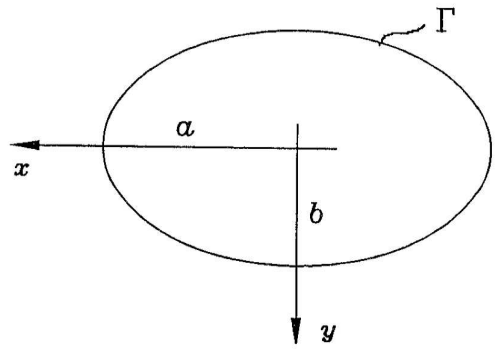


Figura 6.16 Torsión de una barra de sección elíptica

Como la función de esfuerzos de Prandtl debe anularse en la frontera de la sección transversal, podríamos proponer la función

$$\phi = k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \tag{6.86}$$

donde k es una constante.

Para que esta función satisfaga la ecuación diferencial (6.84), debe cumplirse que

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{2k}{a^2} + \frac{2k}{b^2} = -2$$

de donde obtenemos

$$k = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

De manera que

$$\phi = -\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \tag{6.87}$$

De la Ec. (6.85), la rigidez torsional viene dada por

$$D = 2G\int_A k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) dxdy$$

$$= 2Gk\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) dy$$

$$= 2Gk\int_{-a}^{a} \left[\frac{x^2y}{a^2} + \frac{y^3}{3b^2} - y\right]_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$\frac{8Gkb}{3a^3}\int_{a}^{a} (a^2 - x^2)^{3/2}\, dx$$

Haciendo el cambio de variables $x = a\,\text{sen}\theta$ obtenemos finalmente

$$D = -\frac{8Gkab}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta = -\frac{Gkab}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(3+2\cos 2\theta+\cos 4\theta)d\theta = -\pi Gkab$$

Esto es

$$D = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2+b^2} \tag{6.88}$$

De la Ec. (6.80) obtenemos que la rotación por unidad de longitud es

$$\alpha = \frac{M_t(a^2+b^2)}{G\pi a^3 b^3} \tag{6.89}$$

A partir de las expresiones (6.76), (6.87) y (6.89) obtenemos finalmente la distribución de esfuerzos en la barra

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{2M_t}{\pi ab^3}\,y \\ \tau_{yz} &= \frac{2M_t}{\pi a^3 b}\,x\end{aligned} \tag{6.90}$$

El esfuerzo de corte resultante en un punto genérico es

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2} = \frac{2M_t}{\pi a^3 b^3}\sqrt{(b^2x)^2+(a^2y)^2} \tag{6.91}$$

Nótese que en las rectas $x = 0$ y $y = 0$ el esfuerzo resultante varía linealmente con la distancia al origen, actuando en dirección perpendicular el eje respectivo (ver Fig. 6.17). Para un punto cualquiera (x, y) sobre una recta $y = mx$, se tiene que

$$x = r/\sqrt{1+m^2}$$

$$y = mr/\sqrt{1+m^2}$$

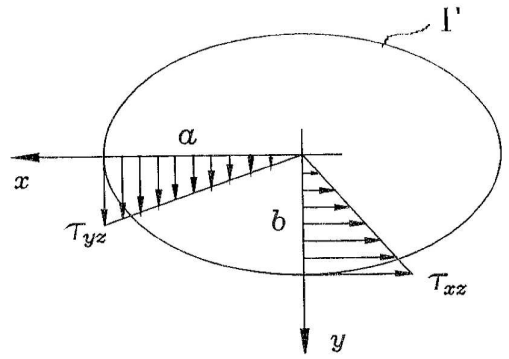


Figura 6.17 Distribución de esfuerzos sobre los ejes x y y

donde r es el módulo del radio vector $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. Luego, el esfuerzo de corte resultante es

$$\tau = \frac{2M_t}{\pi a^3 b^3}\sqrt{(b^2x)^2+(a^2y)^2} = \frac{2M_t}{\pi a^3 b^3}\sqrt{\frac{b^4r^2}{1+m^2}+\frac{a^4m^2r^2}{1+m^2}}$$

$$= \left(\frac{2M_t\sqrt{b^4+m^2a^4}}{\pi a^3 b^3\sqrt{1+m^2}}\right)r$$

Es decir, en los puntos localizados a lo largo de una recta que pasa por centro de la elipse el esfuerzo de corte resultante varía linealmente con la distancia al origen (ver Fig. 6.18), mientras que el esfuerzo resultante máximo se produce en el punto sobre la frontera más cercano al origen y vale

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{xz}(0,b) = \frac{2M_t}{\pi ab^2} \tag{6.92}$$

Para un punto cualquiera sobre la frontera Γ de la elipse tenemos que

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy = 0$$

Es decir, la pendiente de la recta tangente a la elipse en un punto genérico (x, y) viene dada por

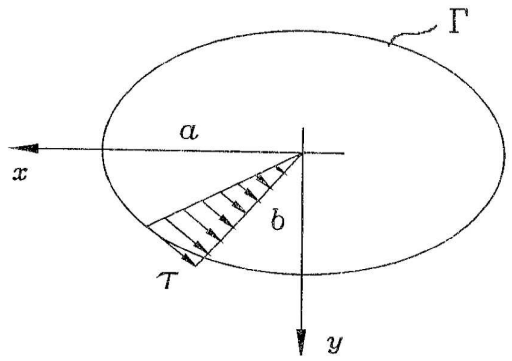


Figura 6.18 Distribución de esfuerzos sobre una recta genérica

$$\frac{dy}{dx} = -(x/y)(b/a)^2$$

Ahora, de (6.90) tenemos

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{\dfrac{2M_t}{\pi a^3 b}\,x}{-\dfrac{2M_t}{\pi a b^3}\,y} = -(x/y)(b/a)^2 = \frac{dy}{dx}$$

Esto es, el esfuerzo resultante en cada punto de la frontera Γ tiene justamente la dirección de la tangente a la elipse, como se observa en la Fig. 6.18.

Ejemplo 6.2

Analizar la distribución de esfuerzos en una barra sometida a torsión cuya sección transversal es un triángulo equilátero de altura a, como se muestra en la Fig. 6.19.

Solución:

Al igual que en el ejemplo anterior, para resolver este problema propondremos una función de esfuerzos que se anule en la frontera de la sección transversal. Las ecuaciones de las rectas que conforman esta frontera son: a) $y = \sqrt{3}\,x - 2a/3$ para el lado AB del triángulo; b) $y = a/3$ para el lado BC; y c) $y = -\sqrt{3}\,x - 2a/3$ para el lado AC.

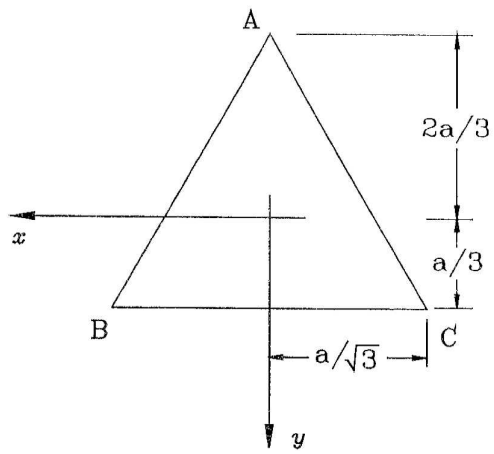


Figura 6.19 Torsión de una barra de sección triangular equilátera

Sea entonces

$$\phi(x,y) = k\,(y - \sqrt{3}x + 2a/3)(y - a/3)(y + \sqrt{3}x + 2a/3)$$

donde k es una constante. Entonces

$$\phi(x,y) = k\,(y - a/3)\left[(y + 2a/3)^2 - 3x^2\right]$$

Como ϕ debe satisfacer la ecuación diferencial (6.84), tenemos

$$\nabla^2\phi(x,y) = 2k(a - 3y) + 3k(2y + 2a/3) = 4ka = -2$$

De donde se obtiene que

$$k = -1/2a$$

Luego

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2a}(y - a/3)\left[3x^2 - (y + 2a/3)^2\right] \qquad (6.9$$

De la Ec. (6.85), la rigidez torsional viene dada por

$$D = \frac{G}{a}\int_A (y - a/3)\left[3x^2 - (y + 2a/3)^2\right]dxdy$$

$$= \frac{G}{a}\int_{-2a/3}^{a/3}(y - a/3)dy \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}(y+2a/3)}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(y+2a/3)}\left[3x^2 - (y + 2a/3)^2\right]dx$$

$$= \frac{G}{a}\int_{-2a/3}^{a/3}(y - a/3)\left[x^3 - x(y + 2a/3)^2\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}(y+2a/3)}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(y+2a/3)} dy$$

$$= -\frac{4G}{3\sqrt{3}\,a}\int_{-2a/3}^{a/3}(y - a/3)(y + 2a/3)^3 dy$$

De donde se obtiene

$$D = \frac{\sqrt{3}Ga^4}{45} \tag{6.94}$$

De la Ec. (6.80) obtenemos que la rotación por unidad de longitud es

$$\alpha = \frac{45M_t}{\sqrt{3}Ga^4} \tag{6.95}$$

A partir de las expresiones (6.76), (6.93) y (6.95) obtenemos finalmente la distribución de esfuerzos en la barra

$$\tau_{xz} = \frac{15\sqrt{3}M_t}{2a^5}(3x^2 - 3y^2 - 2ay)$$
$$\tau_{yz} = \frac{15\sqrt{3}M_t}{a^5}(a - 3y)x \tag{6.96}$$

A lo largo del eje y (recta $x = 0$) los esfuerzos son

$$\tau_{xz} = -\frac{45\sqrt{3}M_t}{2a^5}(y + 2a/3)y$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Sobre esta recta el esfuerzo τ_{xz} se anula en los puntos $y = 0$ y $y = -2a/3$, alcanzando un máximo relativo en $y = -a/3$, punto en el cual el esfuerzo vale $\tau_{xz} = 5\sqrt{3}M_t/2a^3$, y un máximo absoluto en $y = a/3$, cuyo valor es (ver Fig. 6.20)

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{xz}(0, a/3) = \frac{15\sqrt{3}M_t}{2a^3} \tag{6.97}$$

En los vértices del triángulo los esfuerzos son nulos, mientras que en la recta $y = a/3$ los esfuerzos son

$$\tau_{xz} = \frac{15\sqrt{3}M_t}{2a^5}(3x^2 - a^2)$$
$$\tau_{yz} = 0$$

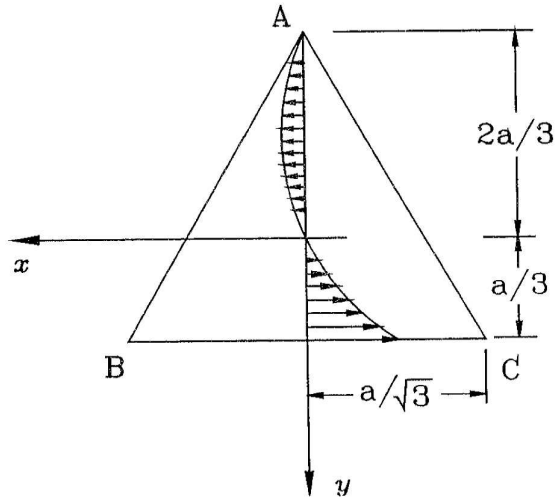


Figura 6.20 Distribución de esfuerzos a lo largo del eje y

Ejemplo 6.3

Analizar la distribución de esfuerzos en una barra de sección rectangular sometida a torsión.

Solución:

Consideremos la sección rectangular de dimensiones $a \times b$ mostrada en la Fig. 6.21. Como lo sugiere la figura, supondremos que $b \geq a$. El lector puede comprobar que este problema no puede ser resuelto usando la estrategia que se empleó en los dos ejemplos anteriores; es decir, si se construye una función de esfuerzos de Prandtl con las ecuaciones de la frontera del rectángulo de manera tal que $\phi = 0$ en el contorno, entonces la ecuación de Poisson (6.78) no se satisface dentro del rectángulo.

Para resolver este problema emplearemos el conocido método de separación de variables utilizado para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en dominios rectangulares. En el presente caso el problema de valor en la frontera (6.84) puede plantearse como

$$\nabla^2\phi(x, y) = -2 \quad en\ A \tag{6.98}$$

$$\phi(\pm a/2,\ y) = 0 \tag{6.99a}$$

$$\phi(x,\ \pm b/2) = 0 \tag{6.99b}$$

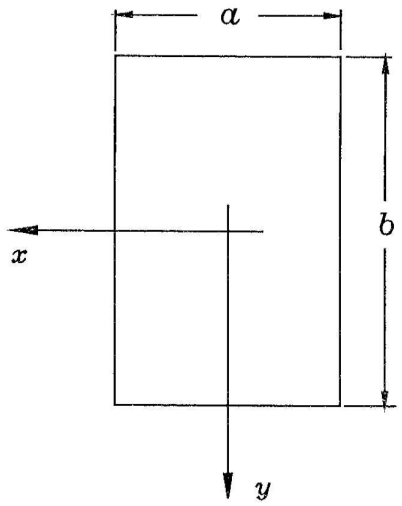


Figura 6.21 Torsión de una barra de sección rectangular

La solución de la ecuación diferencial (6.98) puede plantearse como

$$\phi(x, y) = \phi_H(x, y) + \phi_P(x, y) \tag{6.10}$$

donde $\phi_H(x, y)$ es la solución general de la ecuación homogénea

$$\nabla^2\phi_H(x, y) = 0 \tag{6.10}$$

y $\phi_P(x, y)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$\nabla^2\phi_P(x, y) = -2 \tag{6.10}$$

Supongamos que la solución general de la ecuación homogénea (6.10 puede expresarse como

$$\phi_H(x, y) = X(x)\ Y(y) \tag{6.10}$$

donde $X(x)$ es una función de la variable x únicamente y $Y(y)$ es una función la variable y únicamente.

Diferenciando la Ec. (6.103) y sustituyendo en la Ec. (6.101) obtenemos

$$X''(x)\ Y(y) + X(x)\ Y''(y) = 0$$

O bien

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

en aquellos puntos donde $X(x)Y(y) \neq 0$.

Como el miembro de la izquierda es función de la variable x únicamente el de la derecha es función de y únicamente, la igualdad se verificará solo ambos miembros son iguales a una misma constante, digamos $-\lambda^2$. Entonces

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

Esta ecuación es equivalente al par de ecuaciones diferenciales ordinari

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

Las soluciones generales de estas dos ecuaciones son

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen} \lambda x + c_2 \cos \lambda x$$

$$Y(y) = c_3 \operatorname{senh} \lambda y + c_4 \cosh \lambda x$$

donde las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4 dependen de las condiciones de borde (6.99).

Aplicando entonces la condición de borde (6.99a) tenemos que

$$\phi(\pm a/2,\ y) = X(\pm a/2)\ Y(y) = 0$$

Entonces $X(x)$ debe ser una función par, razón por la cual $c_1 = 0$.
Análogamente, de la condición de borde (6.99b) tenemos que

$$\phi(x, \pm b/2) = X(x)\ Y(\pm b/2) = 0$$

Luego $Y(y)$ debe ser también una función par y $c_3 = 0$.
Así, pues,

$$X(x) = c_2 \cos \lambda x$$

$$Y(y) = c_4 \cosh \lambda x \qquad (6.104)$$

La condición de borde (6.99a) se satisface si

$$X(\pm a/2) = c_2 \cos \lambda a/2 = 0$$

Entonces, como necesariamente c_2 debe ser no nula, debe cumplirse que

$$\cos \lambda a/2 = 0$$

Esta ecuación se satisface para infinitos valores de la constante λ:

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{a}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (6.105)$$

De manera que existen infinitas soluciones para la ecuación (6.101), una para cada valor de λ. Sustituyendo entonces las Ecs. (6.104) en la Ec. (6.103) utilizando (6.105) y haciendo $c_2 c_4 = A_n$, tenemos que, para cada valor de n, la función

$$\phi_{Hn} = A_n \cos \lambda_n x \cosh \lambda_n y$$

es una solución de la ecuación de Laplace (6.101).

Una combinación lineal de estas funciones también será solución de la Ec. (6.101). Sea entonces

$$\phi_H(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \lambda_n x \cosh \lambda_n y \qquad (6.106)$$

la solución general de la ecuación de Laplace. Las constantes λ_n viene dadas por la Ec. (6.105), mientras que los coeficientes A_n deben aún ser determinados a partir de la condición de borde (6.99b).

Para completar nuestra solución, tratemos ahora de determinar una solución particular para la ecuación diferencial no homogénea (6.102). A tales efectos supongamos que esta solución particular puede expresarse también como una serie infinita

$$\phi_P(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \lambda_n x \qquad (6.107)$$

Derivando esta función y sustituyendo en la Ec. (6.102) tenemos que

$$\nabla^2 \phi_P(x, y) = -\sum_{n=0}^{\infty} B_n \lambda_n^2 \cos \lambda_n x = -2$$

Para determinar los coeficientes B_n, multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por $\cos \lambda_m x$ e integramos con respecto a x para obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \lambda_n^2 \int_{a/2}^{a/2} \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x\, dx = 2 \int_{a/2}^{a/2} \cos \lambda_m x\, dx \qquad (6.108)$$

Ahora bien,

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos\lambda_n x \cos\lambda_m x \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ a/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

mientras que

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos\lambda_m x \, dx = \frac{2a\,(-1)^m}{(2m+1)\pi}$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (6.108) obtenemos

$$\lambda_m^2 B_m \, a/2 = \frac{4a(-1)^m}{(2m+1)\pi}$$

Sustituyendo en esta expresión la Ec. (6.105), despejando B_m y escribiendo la expresión resultante para $m = n$, obtenemos que

$$B_n = \frac{8a^2\,(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3}$$

Introduciendo este resultado en la Ec. (6.107) obtenemos la solución particular de la Ec. (6.102)

$$\phi_p(x,y) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos\lambda_n x \qquad (6.109)$$

Sustituyendo las funciones (6.106) y (6.109) en la expresión (6.100), obtenemos que la solución completa de nuestro problema viene dada por

$$\phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{8a^2\,(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3} + A_n \cosh\lambda_n y \right] \cos\lambda_n x \qquad (6.110)$$

faltando únicamente por determinar los coeficientes A_n. A tales efectos aplicamos la condición de borde (6.99b) para obtener

$$\phi(x,\pm b/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{8a^2\,(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3} + A_n \cosh\frac{\lambda_n b}{2} \right] \cos\lambda_n x = 0$$

Esta ecuación se satisface si todos los coeficientes que acompañan al término $\cos\lambda_n x$ se anulan, de donde se obtiene que

$$A_n = -\frac{8a^2\,(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3 \cosh\frac{\lambda_n b}{2}}$$

Entonces la función de esfuerzos de Prandtl viene expresada finalmente como

$$\phi(x,y) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\cosh\lambda_n y}{\cosh(\lambda_n b/2)} \right] \cos\lambda_n x \qquad (6.111)$$

con λ_n dado por la Ec. (6.105).

De la Ec. (6.85) calculamos la rigidez torsional como

$$D = 2G \int_A \phi \, dx dy$$

$$= \frac{16a^2G}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 - \frac{\cosh\lambda_n y}{\cosh(\lambda_n b/2)} \right] dy \int_{-a/2}^{a/2} \cos\lambda_n x \, dx$$

$$= \frac{16a^2G}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[b - \frac{2}{\lambda_n} \operatorname{tgh}(\lambda_n b/2) \right] \frac{2}{\lambda_n} \operatorname{sen}(\lambda_n a/2)$$

$$= \frac{32a^2G}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} \left[b - \frac{2}{\lambda_n} \operatorname{tgh}(\lambda_n b/2) \right] (-1)^n$$

Esto es

$$D = \frac{32a^3bG}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{64a^4G}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\text{tgh}\,(\lambda_n b/2)}{(2n+1)^5}$$

Puede comprobarse que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = 1+\frac{1}{81}+\frac{1}{625}+\ldots = \frac{\pi^4}{96}$$

Luego

$$D = \frac{a^3bG}{3} - \frac{64a^4G}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\text{tgh}\,(\lambda_n b/2)}{(2n+1)^5}$$

O bien

$$D = k_1 G a^3 b \tag{6.112}$$

donde

$$k_1 = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}(a/b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\,\text{tgh}\,\frac{(2n+1)\pi b}{2a} \tag{6.113}$$

El lector puede comprobar por sí mismo que esta serie converge rápidamente a un número definido para cada valor del cociente b/a. En la segunda columna de la Tabla 6.1 se muestran los valores que adquiere este coeficiente en función de la relación b/a.

De la Ec. (6.80) tenemos que $\alpha = M_t/D$. Luego, la rotación por unidad de longitud viene dada por

$$\alpha = \frac{M_t}{k_1 G a^3 b} \tag{6.114}$$

Tabla 6.1 Coeficientes para el cálculo de los esfuerzos y las rotaciones en una barra de sección rectangular en función de la relación b/a

b/a	k_1	k_2	k	b/a	k_1	k_2	k
1.0	0.1406	0.6753	4.8039	2.8	0.2583	0.9801	3.7938
1.1	0.1540	0.7198	4.6744	3.0	0.2633	0.9854	3.7423
1.2	0.1661	0.7588	4.5676	3.5	0.2733	0.9934	3.6341
1.3	0.1771	0.7927	4.4772	4.0	0.2808	0.9970	3.5506
1.4	0.1869	0.8222	4.3988	4.5	0.2867	0.9986	3.4838
1.5	0.1958	0.8476	4.3296	5.0	0.2913	0.9994	3.4303
1.6	0.2037	0.8694	4.2675	6.0	0.2983	0.9999	3.3517
1.7	0.2109	0.8882	4.2111	7.0	0.3033	1.0000	3.2967
1.8	0.2174	0.9044	4.1594	8.0	0.3071	1.0000	3.2563
1.9	0.2233	0.9182	4.1116	9.0	0.3100	1.0000	3.2259
2.0	0.2287	0.9301	4.0671	10.0	0.3123	1.0000	3.2018
2.2	0.2380	0.9489	3.9864	20.0	0.3228	1.0000	3.0976
2.4	0.2459	0.9626	3.9149	100.0	0.3312	1.0000	3.0190
2.6	0.2526	0.9727	3.8511	∞	0.3333	1.0000	3.0000

A partir de las expresiones (6.76) y (6.111) obtenemos la distribución d esfuerzos en la barra

$$\tau_{xz} = -\frac{8aG\alpha}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2\cosh(\lambda_n b/2)}\cos\lambda_n x\,\text{senh}\,\lambda_n y \tag{6.115a}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{8aG\alpha}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\left[1-\frac{\cosh\lambda_n y}{\cosh(\lambda_n b/2)}\right]\text{sen}\,\lambda_n x \tag{6.115b}$$

Estos esfuerzos se anulan en los vértices del rectángulo y, al igual que e el caso de la elipse y del triángulo equilátero, el esfuerzo de corte máximo s produce en el punto de la superficie exterior más cercano al origen. Entonces, s $b > a$, el esfuerzo de corte máximo se producirá en los puntos $P(\pm a/2, 0)$. E estos puntos tenemos que

$$\tau_{xz}(\pm a/2,\ 0) = 0$$

$$\tau_{yz}(\pm a/2,\ 0) = \pm \frac{8aG\alpha}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[1 - \operatorname{sech}(\lambda_n b/2)\right]$$

Puede comprobarse que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

Luego

$$\tau_{\text{máx}} = G\alpha a \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \operatorname{sech}(\lambda_n b/2)\right]$$

O bien

$$\tau_{\text{máx}} = k_2 G \alpha a \tag{6.116}$$

donde

$$k_2 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \operatorname{sech} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} \tag{6.117}$$

Este coeficiente k_2 puede ser evaluado en términos de la relación b/a, resultado que se muestra en la tercera columna de la Tabla 6.1.

Sustituyendo el valor de α dado por la Ec. (6.114) en la Ec. (6.116) obtenemos finalmente

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{k_2 M_t}{k_1 a^2 b}$$

O bien

$$\tau_{\text{máx}} = k \frac{M_t}{a^2 b} \tag{6.118}$$

donde

$$k = k_2 / k_1$$

Este coeficiente se muestra también en la cuarta columna de la Tabla 6.1 en función de la relación b/a.

Nótese en esta tabla que si $b >> a$, que es el caso de una lámina, entonces $k_1 \to 1/3$, $k_2 \to 1$ y $k \to 3$. En estas circunstancias las ecuaciones (6.113), (6.114) y (6.118) pueden ser escritas como

$$D = \frac{1}{3} G a^3 b \tag{6.119}$$

$$\alpha = \frac{3M_t}{Ga^3 b} \tag{6.120}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3M_t}{a^2 b} \tag{6.121}$$

Estos resultados pueden ser aplicados al caso de las barras de sección abierta sometidas a torsión, como es la situación de los perfiles estructurales I, U, L, etc. En efecto, consideremos una sección abierta compuesta por n segmentos delgados, como se muestra en la Fig. 6.22. Sean a_i y b_i el espesor y el largo de un segmento genérico, respectivamente. Por razones de equilibrio puede suponerse que el momento torsor aplicado M_t se reparte por igual entre los n segmentos, con lo cual se tiene que

$$M_t = \sum_{i=1}^{n} M_{ti} \tag{6.122}$$

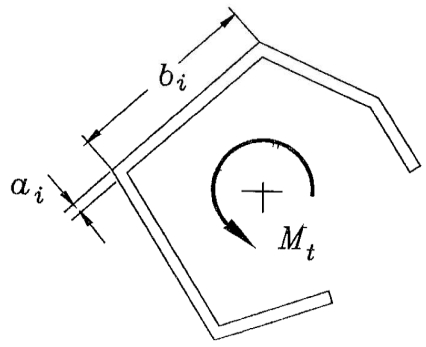


Figura 6.22 Torsión de una barra de sección abierta

donde M_{ti} es el momento torsor transmitido por el i-ésimo segmento.

La rotación por unidad de longitud de cada segmento es

$$\alpha_i = \frac{3M_{ti}}{Ga_i^3 b_i}$$

Si se supone todos los segmentos experimentan la misma rotación por unidad de longitud α, podemos entonces escribir

$$\alpha_i = \alpha = \text{constante}$$

Luego

$$M_{ti} = \frac{1}{3} G\alpha a_i^3 b_i \tag{6.123}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (6.122) obtenemos

$$M_t = \frac{1}{3} G\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i^3 b_i$$

De donde

$$\alpha = \frac{3M_t}{G\sum_{i=1}^{n} a_i^3 b_i} \tag{6.124}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (6.123) deducimos que el momento torsor M_{ti} transmitido por el i-ésimo segmento viene dado por

$$M_{ti} = \frac{a_i^3 b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^3 b_i} M_t \tag{6.125}$$

Luego, de la Ec. (6.121) obtenemos que el esfuerzo de corte máximo en cada segmento se expresa como

$$(\tau_{\text{máx}})_i = \frac{3M_{ti}}{a_i^3 b_i}$$

Es decir

$$(\tau_{\text{máx}})_i = \frac{3M_t a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^3 b_i} \tag{6.126}$$

Problemas

6.1 Considérese un cilindro de longitud L, radio interior a y radio exterio sometido a una presión externa p.

a) Determine los esfuerzos radial y tangencial en coordenadas polare
b) Represente gráficamente la distribución de estos esfuerzos a lo la de la pared del cilindro.
c) Utilizando la teoría de Tresca, determine cuáles son los puntos críticos del cilindro y calcule la presión máxima que éste pu soportar suponiendo que el límite de fluencia del material es S_y.

6.2 En la Fig. P.6.2 se muestra un troquel cilíndrico de radios interno externo a y b, respectivamente. Considerando que la matriz infinitamente rígida comparada con el troquel y despreciando las fue de fricción, calcule la presión radial p que se genera entre el troquel matriz cuando se le aplica al troquel una presión axial uniforme p_o.

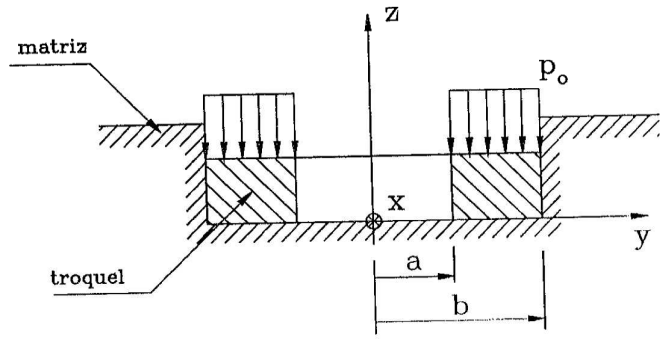


Figura P.6.2

6.3 Considérese una esfera de radio interior a y radio exterior b sometida a una presión interna p.

a) Determine los esfuerzos radial, tangencial y meridional en función de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

b) Represente gráficamente la distribución de estos esfuerzos a lo largo de la pared de la esfera.

c) Utilizando la teoría de Tresca, determine cuáles son los puntos más críticos de la esfera y calcule la presión máxima que ésta puede soportar suponiendo que el límite de fluencia del material es S_y.

d) Compare sus resultados con el caso de un cilindro.

6.4 Resuelva el problema anterior para una esfera de radio interior a y radio exterior b sometida a una presión externa p.

6.5 En la Fig. P.6.5 se muestra una barra cilíndrica de longitud L y sección transversal arbitraria A. La barra está sometida exclusivamente a la acción de su propio peso y descansa sobre la superficie horizontal $z = 0$. Las propiedades elásticas del material son E y ν. Para resolver el problema se propone la distribución de esfuerzos

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g(z - L) \end{bmatrix}$$

donde ρ es la densidad del material y g es la aceleración de la gravedad.

a) Determine las fuerzas de volumen.

b) Demuestre que la distribución de esfuerzos propuesta es teóricamente correcta, independientemente del problema que se desea resolver.

c) Determine el campo de desplazamientos para el problema específico planteado aplicando las condiciones de borde pertinentes.

d) Determine el desplazamiento vertical del punto $(0, 0, L)$ ubicado en el extremo superior de la barra.

6.6 Demuestre que los desplazamientos longitudinales de una barra de sección elíptica con semiejes mayor y menor a y b sometida a torsión vienen dados por

$$w(x, y, z) = \frac{M_t(b^2 - a^2)}{\pi G a^3 b^3} xy$$

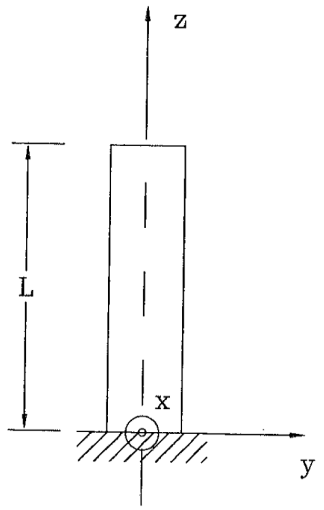


Figura P.6.5

6.7 Demuestre que los desplazamientos longitudinales de una barra sometida a torsión, cuya sección transversal es un triángulo equilátero de altura vienen dados por

$$w(x, y, z) = \frac{15\sqrt{3}M_t}{2Ga^5} x(x^2 - 3y^2)$$

6.8 Considere una barra de sección circular de radio R sometida a torsión.

a) Demuestre que en este caso la función de esfuerzos de Prandtl puede tomarse como

$$\phi(x, y) = k(x^2 + y^2 - R^2)$$

donde k es una constante.

b) Determine el valor de la constante k.

c) Determine la rigidez torsional.

d) Determine la distribución de esfuerzos.

6.9 Demuestre que la rigidez torsional de una barra de sección elíptica puede expresarse como

$$D = 4G\frac{I_x I_y}{I_x + I_y}$$

donde I_x e I_y son los momentos de inercia de la elipse con respecto a los ejes principales mayor y menor, respectivamente.

6.10 Considere tres barras prismáticas, una de sección circular, otra de sección elíptica y otra cuya sección es un triángulo equilátero. Demuestre que la sección circular es la más eficiente, en el sentido de que para un área dada de la sección transversal, la barra de sección circular posee la mayor rigidez torsional y el menor esfuerzo de corte máximo.

6.11 Demuestre que los desplazamientos longitudinales de una barra de sección rectangular de dimensiones $a \times b$ sometida a torsión vienen dados por

$$w(x,y,z) = \frac{M_t}{k_1 G a^3 b}\left[xy - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{senh} \lambda_n y}{\cosh(\lambda_n b/2)} \operatorname{sen} \lambda_n x \right]$$

donde $\lambda_n = (2n+1)\pi/a$ y

$$k_1 = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}(a/b)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{tgh} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}$$

6.12 Sea $\psi(x, y)$ una función tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

donde $\varphi(x, y)$ es la función de alabeo.
Demuestre que, en términos de esta nueva función $\psi(x, y)$,

a) El problema de torsión puede plantearse como

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi(x,y) = 0 & \text{en } A \\ \psi = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + k & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

donde k es una constante arbitraria

b) Los esfuerzos vienen dados por

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y\right), \qquad \tau_{yz} = G\alpha\left(x - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

c) La rigidez torsional se expresa como

$$D = G\int_A \left[\left(x - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(y - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

6.13 Utilizando la formulación planteada en el problema anterior,

a) Demuestre que para una barra de sección elíptica de semiejes a y b la función $\psi(x, y)$ viene dada por

$$\psi(x,y) = \frac{a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)}(x^2 - y^2)$$

b) Compruebe que $\nabla^2\psi = 0$ dentro de la elipse y que $\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + k$ sobre la frontera. Encuentre el valor de la constante k.

Respuestas a los Problemas Propuestos

Capítulo 1

1.1 b) 6.6; 3.3; 5.7 kgf/mm^2
c) 59.8°
d) 29.5°, 69.6° y 110.4°

1.2 b) 9.2; 4.2; 8.2 kgf/mm^2
c) 62.9°
d) 3.3°, 92.9° y 91.7°

1.3 b) 4.6; – 1.6; 4.3 kgf/mm^2
c) 110.4°
d) 78.7°, 42.7° y 130.5°

1.4 b) 9.7 kgf/mm^2; 13.9°; 103.9°; 90°
c) – 9.3; 2.7 kgf/mm^2

1.5 b) 6.4 kgf/mm^2
c) 5.5; 3.3 kgf/mm^2

1.7 b) $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

1.8 $12\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; 8.8; 8.4

1.9 10 MPa; $(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{6}$

1.10 a) $(380\mathbf{i}-10\mathbf{j}+80\mathbf{k})/\sqrt{61}$ MPa; $(16\mathbf{i}-26\mathbf{j}+16\mathbf{k})$MPa
b) – 11.2; 32.6 MPa

1.11 $\begin{bmatrix} 65/2 & -75/2 & -10/\sqrt{2} \\ -75/2 & -15/2 & -10/\sqrt{2} \\ -10/\sqrt{2} & -10/\sqrt{2} & 40 \end{bmatrix}$ MPa

1.12 $|\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{i})|^2+|\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{j})|^2+|\mathbf{T}(\mathbf{r},\mathbf{k})|^2=I_1^2-2I_2$, donde I_1 e I_2 son los dos primeros invariantes del estado de esfuerzos.

1.14 – 9.8 kgf/mm^2; 19.9°, 70.1° y 90°;
– 8.0 kgf/mm^2; 90°, 90° y 0°;
5.8 kgf/mm^2; 70.1°, 160.1° y 90°.

1.15 – 8.4; – 0.8; 11.2 kgf/mm^2

1.16 a) $T = p$
b) $\sigma = p$; $\tau = 0$

1.17 a) – 5.2; 4.2; 8.0 kgf/mm^2.
b) 61°, 90° y 29°; 29°, 90° y 119°; 90°, 0° y 90°
d) i) 2.8; 4.9 kgf/mm^2
ii) – 1.9; 5.7 kgf/mm^2
iii) – 2.9; 4.1 kgf/mm^2
iv) 5.2; 1.6 kgf/mm^2

1.18 a) $\begin{bmatrix} 100 & 150 & 0 \\ 150 & -250 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$ kgf/cm^2
b) -305.5; 155.5; 300 kgf/cm^2
c) i) No es posible.
ii) Sí es posible. La normal al plano forma ángulos de 25°, 65° y 90° con los ejes principales *1*, *2* y *3*, respectivamente, y forma ángulos de 45°, 135° y 90° con los ejes *x*, *y* y *z*.

1.19 a) $\begin{bmatrix} 50 & -10 & 0 \\ -10 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix}$ MPa

b) 40; 60; 60 MPa

c) $(\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}; (-\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}; \mathbf{k}$

1.20 b) – 3.0; – 1.5; 6.5 kgf/mm^2
c) 4.8; 4.2 kgf/mm^2
d) – 0.7; 2.4 kgf/mm^2

1.21 a) – 3 kgf/mm^2; 90°, 90° y 0°;
0 kgf/mm^2; 27°, 63° y 90°;
10 kgf/mm^2; 117°, 27° y 90°;
b) 6.5 kgf/mm^2

1.22 a) – 6.6 kgf/mm^2; 114°, 24° y 90°;
3.0 kgf/mm^2; 90°, 90° y 0°;
9.6 kgf/mm^2; 24°, 66° y 90°;
b) 8.1 kgf/mm^2

1.23 a) – 5.2 kgf/mm^2; 90°, 58° y 148°;
– 0.8 kgf/mm^2; 90°, 32° y 58°;
10 kgf/mm^2; 0°, 90° y 90°;
b) 7.6 kgf/mm^2

1.24 a) –7.4 kgf/mm^2; 124°, 34° y 90°;
0 kgf/mm^2; 90°, 90° y 0°;
3.4 kgf/mm^2; 34°, 56° y 90°;
b) 5.4 kgf/mm^2

1.25 a) – 5 kgf/mm^2; 0°, 90° y 90°;
0 kgf/mm^2; 90°, 90° y 180°;
5 kgf/mm^2; 90°, 0° y 90°;
b) 5 kgf/mm^2

1.26 a) – 10 kgf/mm^2; 90°, 90° y 180°;
0 kgf/mm^2; 90°, 0° y 90°;
10 kgf/mm^2; 0°, 90° y 90°;
b) 10 kgf/mm^2

1.27 a) – 12.2 kgf/mm^2; 160°, 70° y 90°;
0 kgf/mm^2; 90°, 90° y 0°;
6.2 kgf/mm^2; 70°, 20° y 90°;
b) 9.2 kgf/mm^2

1.28 a) – 2 kgf/mm^2; 63°, 27° y 90°;
0 kgf/mm^2; 90°, 90° y 0°;
8 kgf/mm^2; 27°, 117° y 90°;
b) 5 kgf/mm^2

1.29 a) – 10 MPa; 45°, 45° y 90°;
0 MPa; 90°, 90° y 0°;
10 MPa; 45°, 135° y 90°;
b) 10; 8.2 MPa
c) La normal al plano coincide con el eje y.

1.30 b) – 7 kgf/mm^2; 90°, 18° y 108°;
3 kgf/mm^2; 90°, 72° y 18°;
5 kgf/mm^2; 0°, 90° y 90°

1.31 a) 13720 psi; – 53°;
3280 psi; 37°;
b) 6860 psi
c) 3420; – 1200 psi
d) 13020; – 2610 psi

1.32 Sí es posible; la normal forma ángulos de 45°, 53° y 68° con los ejes 1, 2 y 3.

1.33 45°; σ_y

1.34 El esfuerzo de corte en el plano octaedral adquiere su valor máximo para un estado de esfuerzos en el cual $\sigma_2 = \sigma_1$ o $\sigma_2 = \sigma_3$. Su valor mínimo se produce en un estado de esfuerzos para el cual $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$.

1.35 – 32; – 68 MPa

1.36 47 MPa; 85° con el eje horizontal
– 22 MPa; 175° con el eje horizontal

1.37 a) –177; 210 MPa
b) 106; – 333 MPa

1.38 123 MPa

1.39 $\sigma_x = 84$ MPa; $\sigma_y = 42$ MPa; $\tau = -21$ MPa

1.40 a) – 20 MPa; coincide con x_1;
0 MPa; perpendicular al plano del dibujo;
60 MPa; 90° en sentido horario con el eje x_1.
d) Sí existe. Su normal forma 30° en sentido antihorario con respecto al eje x_1; el esfuerzo de corte en este plano es 35 MPa.

1.41 a) 60; 100 MPa
b) Sí es posible; la normal al plano forma ángulos de 68°, 42° y 56° con los ejes principales 1, 2 y 3, respectivamente.

1.42 a) -2 kgf/mm^2; coincide con el eje b;
0 kgf/mm^2; ortogonal al plano del dibujo;
6 kgf/mm^2; 90° en sentido horario con respecto al eje b;
b) 3.5; 0; -3.5 kgf/mm^2
c) 4 kgf/mm^2 ; el plano es perpendicular al plano del dibujo y su normal forma 15° con el eje a y 45° con el eje b.
e) Sí es posible; la normal forma ángulos de 90°, 45° y 45° con los ejes 1, 2 y 3.

1.43 3.2 kgf/mm^2

1.44 a) $\sigma_x = 150.6$ MPa; $\sigma_y = 50.2$ MPa; $\tau_{xy} = 50.2$ MPa;
b) 0 MPa; 90°, 90° y 0°;
29.4 MPa; 67.5°,157.5° y 90°;
171.4 MPa; 22.5° , 67.5° y 90°
c) 85.7 MPa;

1.45 a) $\sigma_x = 9$ ksi; $\sigma_y = 3$ ksi; $\tau_{xy} = -4$ ksi
b) 63°
c) 0 ksi; 90°, 90° y 0°;
1 ksi; 63°, 27° y 90°;
11 ksi; 153° , 63° y 90°

1.46 a) 139 MPa
b) 0 MPa; perpendicular al plano del dibujo;
80 MPa; $-41°$ con la horizontal;
360 MPa; 49° con la horizontal
c) La normal al plano forma 45°, 45° y 90° con los ejes principales 1, 2 y 3.

1.47 a) -1000 kgf/cm^2; ortogonal al eje horizontal;
0 kgf/cm^2; ortogonal al plano del dibujo;
1000 kgf/cm^2; coincide eje horizontal;
b) Existen dos planos simétricos con respecto al eje horizontal; sus normales forman 45° y $-45°$ con el eje horizontal y en ellos el esfuerzo de corte es 1000 kgf/cm^2.

1.48 a) 60 MPa
b) 45°
c) 58 MPa

1.49 a) -2 kgf/mm^2; coincide con el eje y;
0 kgf/mm^2; perpendicular al plano xy;
6 kgf/mm^2; coincide con el eje x;
b) $\sigma_x = 6$ kgf/mm^2; $\sigma_y = -2$ kgf/mm^2; $\tau_{xy} = 0$

1.50 a) 93 MPa
b) 116; 80; -96 MPa

1.51 -2.7; 2.5 kgf/mm^2

1.52 a) $\begin{bmatrix} 130 & -30 & 0 \\ -30 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$ MPa
b) -45 MPa; 80°, 10° y 90°;
40 MPa; 90°, 90° y 0°;
135 MPa; 10°, 100° y 90°;
c) 90 MPa; la normal al plano forma ángulos de 55°, 145° y 90° con l
ejes x, y y z, respectivamente.
d) Sí es posible; la normal al plano forma ángulos de 55°, 45° y 65° c
los ejes 1, 2 y 3, respectivamente.

1.53 a) $\begin{bmatrix} 4100 & -1500 & 0 \\ -1500 & -1100 & 0 \\ 0 & 0 & 6500 \end{bmatrix}$ psi.
b) -1500 psi; 75°, 15° y 90°;
4500 psi; 15°, 105° y 90°;
6500 psi; 90°, 90° y 180°;
c) 4000; 3400 psi

1.54 a) $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ kgf/mm^2
b) -2 kgf/mm^2; 22.5°, 112.5° y 90°.
2 kgf/mm^2; 67.5°, 22.5° y 90°;
6 kgf/mm^2; 90°, 90° y 0°;
c) 2; 4 kgf/mm^2
d) La normal al plano forma ángulos de 90°, 45° y 45° con los ejes 1, 2
3.

1.55 a) 23 MPa; 124° en sentido antihorario con respecto al eje x;
175 MPa; 34° en sentido antihorario con respecto al eje x.
b) No es posible; el valor mínimo de la componente normal del vector esfuerzo es 23 MPa.

1.56 b) –27.3 MPa; 42.5 MPa.
c) Sí existe. Su normal forma ángulos de 90°, 55° y 35° con los ejes x, y y z, respectivamente. El esfuerzo tangencial en este plano vale 71 MPa.

1.57 a) $\sigma_x = -50\sqrt{2}$ MPa; $\sigma_y = 50\sqrt{2}$ MPa; $\tau_{xy} = -50\sqrt{2}$ MPa,
b) – 100 MPa; 90°, 90° y 0°;
0 MPa; 22.5°, 67.5° y 90°;
100 MPa; 112.5°, 22.5° y 90°;
c) 100 MPa. La normal al plano forma ángulos de 67.5°, 22.5° y 90° con los ejes ejes x, y y z, respectivamente.

1.58 b) 20.6 kgf/mm^2.
c) 45°; $10\sqrt{2}$ kgf/mm^2.
d) Sí existe. Su normal forma ángulos de 59°, 47° y 59° con los ejes principales 1, 2 y 3, respectivamente.

1.59 a) Sí existe. Su normal forma ángulos de 65°, 45° y 124° con los ejes x, y y z, respectivamente.
b) No existe.

1.60 a) $\sigma = -7$ MPa; $\tau = -30$ MPa; $\varphi = 66°$.
b) $\sigma_1 = -15$ MPa; forma 128.5° en sentido antihorario con respecto a la traza AB.
$\sigma_2 = 0$ MPa; su dirección es orotogonal al plano del dibujo;
$\sigma_3 = 108$ MPa; forma 38.5° en sentido antihorario con respecto a la traza AB.
c) 61.5 MPa; la normal al plano forma 83.5° en sentido antihorario con respecto a la traza AB.

1.61 a) $p \leq 0$.

1.62 a) $\begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa.
c) Sí, existen dos planos: $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{n} = \mathbf{j}$.

1.63 30 MPa.

1.64 a) 67.1 MPa.
b) 0 MPa; 90°, 90° y 0°;
60 MPa; 127°, 37° y 90°;
200 MPa; 37° , 53° y 90°
c) Sí es posible. Su normal forma ángulos de 55°, 40° y 75° con los ejes principales.

1.65 $\lambda_i^d = \lambda_i - p$, para $i = 1, 2, 3$, donde λ_i^d y λ_i son los esfuerzos principales de la componente desviadora y de la matriz original, respectivamente. Las direcciones principales de ambas matrices son idénticas.

1.66 a) $\sigma^i = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\sigma^d = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ kgf/mm2;
b) -8.6 kgf/mm^2; 114°, 24° y 90°;
1 kgf/mm^2; 90°, 90° y 0°;
7.6 kgf/mm^2; 24°, 66° y 90°
c) Los esfuerzos principales calculados en (b) son iguales a los de la matriz original menos 2 kgf/mm^2; las direcciones principales son idénticas.

1.68 Es posible solo si $A = 0$.

1.69 No las satisface; implicaría, por una parte, que $dM/dx = 2/3V$, lo cual no es cierto, y por otra, que $dV/dx = 0$, lo cual ocurre solo si V es constante. La razón radica en que la ecuación para calcular el esfuerzo de corte τ_{xy} en vigas, denominada *fórmula de Zhuravski*, proporciona resultados aproximados aceptables desde un punto de vista práctico, pero, conceptualmente, es incorrecta.

1.70 a) $\mathbf{f} = -4z\,\mathbf{k}$
b) $\sigma_1 = -a$; $\sigma_2 = a$; $\sigma_3 = 8a$
c) $\tau_{máx} = 9a/2$
d) $\sigma_1 = -11\,a/3$; $\sigma_2 = -5\,a/3$; $\sigma_3 = 16a/3$

1.72 Sí existe equilibrio.

1.73 $\mathbf{f} = -60x^2\,\mathbf{i} - 90z^2\,\mathbf{j}$

Capítulo 2

2.1 $\varepsilon_{EF} = 8\times10^{-4}; \varepsilon_{CH} = 16\times10^{-4}$

2.2 $\varepsilon_{AD} = 0.0075; \varepsilon_{BD} = 0.0050; \varepsilon_{CD} = -0.0025$

2.3 $\dfrac{2h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{d+D}$

2.4 a) $-100.7\mathbf{i} + 0.3\mathbf{j} - 199.9\mathbf{k}$;
b) 0.2248; – 0.0470°;
c) 0.2236; – 0.0468°

2.5 a) $4.014\mathbf{i} + 2.014\mathbf{j} + 2.006\mathbf{k}$;
b) $2.007\mathbf{i} + 1.007\mathbf{j} + 1.003\mathbf{k}$;
c) $\varepsilon_{AB} = 0.0040; \varepsilon_{OC} = 0.0040$;

2.6 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -0.0020; \gamma_{xy} = -0.0005$

2.7 a) $u = 8y\,(x-5)\times10^{-5}$, $v = -2y\times10^{-4}$, $w = 0$;
$\varepsilon_x = 8y\times10^{-5}$, $\varepsilon_y = -2\times10^{-4}$, $\gamma_{xy} = 4(x-5)\times10^{-5}$;
b)

Punto	ε_x	ε_y	γ_{xy}
$A(0, 0)$	0	-2×10^{-4}	-2×10^{-4}
$B(10, 0)$	0	-2×10^{-4}	2×10^{-4}
$C(10, 10)$	8×10^{-4}	-2×10^{-4}	2×10^{-4}
$D(0, 10)$	8×10^{-4}	-2×10^{-4}	-2×10^{-4}

2.8 a) $-\dfrac{5}{3}\times10^{-3}$;
b) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}\times10^{-3}$

2.9 a) $\overline{A'B'} = 1.4192"$, $\overline{C'D'} = 1.2254"$;
b) 90.1654°
c) $(\mathbf{j}-\mathbf{k})/\sqrt{2}$

2.10 a) $u = y/3$, $v = x/3$, $w = 0$; $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
b) $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32/9$, $z = 0$;
c) 4/3, 2/3; 45°;
d) 1/3, – 1/3;
e) 1/3; – 1/3;
f) Sí.

2.11 a) Existen dos direcciones: **i** y **j**;
b) $x^2 - \sqrt{3}\,xy + y^2 = 1/3$, $z = 0$;

2.12 b) Si se calcula la deformación normal en la dirección radial se tiene $\varepsilon_r = (a'-a)/a = a'/a - 1 = [1+f(a)] - 1 = f(a)$. Entonces la función es una medida de la deformación normal en la dirección radial.

2.13 a) $\varepsilon = \dfrac{My}{EI}\begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $u = w = 0$; $v = -\dfrac{M}{2EI}z^2$;

e) $u(a/2, b/2, 0) = -u(a/2, -b/2, 0)$
$= u(-a/2, b/2, 0) = -u(-a/2, -b/2, 0) = -3\nu M/Eb^2$

$v(a/2, b/2, 0) = v(a/2, -b/2, 0) = v(-a/2, b/2, 0) = v(-a/2, -b/2, 0)$
$= 3\nu M(a^2 - b^2)/2Eab^3$

$w(a/2, b/2, 0) = w(a/2, -b/2, 0)$
$= w(-a/2, b/2, 0) = w(-a/2, -b/2, 0) = 0$

2.14 b) $\varepsilon_x = \dfrac{1}{2A}[u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)]$;

$\varepsilon_y = \dfrac{1}{2A}[v_1(x_3 - x_2) + v_2(x_1 - x_3) + v_3(x_2 - x_1)]$;

$\gamma_{xy} = \dfrac{1}{4A}[u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)]$
$+ \dfrac{1}{4A}[v_1(y_2 - y_3) + v_2(y_3 - y_1) + v_3(y_1 - y_2)]$;

c) $\varepsilon_x = \dfrac{u_2 - u_1}{h}$; $\varepsilon_y = \dfrac{v_3 - v_1}{h}$; $\varepsilon_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_3 - u_1}{h} + \dfrac{v_2 - v_1}{h}\right)$;

2.15 0.00065

2.16 $\varepsilon_1 = 3\times10^{-4}$; $\varepsilon_2 = -12\times10^{-4}$; $\gamma_{máx} = 7.5\times10^{-4}$; la deformación tangencial es máxima en un sistema de coordenadas que forma un ángulo $\theta = -18.4°$ con respecto al sistema xy.

2.17 a) $\varepsilon_x = -0.004$; $\varepsilon_y = 0.005$; $\gamma_{xy} = -0.002$;
b) $\theta_1 = 102°$; $\theta_2 = 12°$;

2.18 0.003 y −0.002

2.19 a) 12×10^{-4}, 6.4×10^{-4} y -4.4×10^{-4};
b) 8.2×10^{-4};
c) 5.2×10^{-4} y -3.3×10^{-4}

2.20 5.1×10^{-4}, 0 y -5.9×10^{-4}

2.21 5×10^{-4}, 0 y -3×10^{-4}

2.22 a) 0, -2×10^{-4} y -14×10^{-4};
b) 30°

2.23 a) 11.4×10^{-4}, 8×10^{-4} y -7.4×10^{-4};
b) 9.4×10^{-4};
c) 41.3°

2.24 $\varepsilon_1 = 5.2\times10^{-4}$; $\varepsilon_2 = 0.8\times10^{-4}$; $\gamma_{máx} = 2.2\times10^{-4}$;

2.25 $\varepsilon_x = -0.0010$; $\varepsilon_y = 0.0094$; $\gamma_{xy} = -0.0030$;

2.26 a) $\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$;
b) -6×10^{-3}; 90°, 90° y 0°;
-4×10^{-3}; 225°, 135° y 90°;
8×10^{-3}; 315°, 225° y 90°;
c) 7×10^{-3};
d) -3.2×10^{-3}

2.27 $\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3.5 \\ -2 & 1 & -1.5 \\ 3.5 & -1.5 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$;

2.28 -1.7×10^{-3}

2.29 Las deformaciones principales son $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0.010$ y $\varepsilon_3 = 0.0$
Luego, como una de ellas es nula, el estado de formaciones es plano.

2.30 a) 141 mm;
b) 89.89°.

2.31 a) 2×10^{-4};
b) -5×10^{-4};
c) -8×10^{-4}

2.32 $\pm2.5\times10^{-3}$

2.33 8.9×10^{-3} y -4.9×10^{-3}

2.34 $u(x, y, z) = x + y + x^3 + xy^2 + xy^4$;
$v(x, y, z) = x + y + 3x^2y + y^5$;
$w(x, y, z) \equiv 0$

2.35 $u(x, y, z) = 3xy^2 + x^2 - 2xz + z^2$;
$v(x, y, z) = 2xz + y^2 + 2yz + z^2$;
$w(x, y, z) = z^2 - 2xy$

2.37 a) $u(x, y, z) = ay + bz + c$;
$v(x, y, z) = -ax + dz + e$;
$w(x, y, z) = -bx - dy + f$;
b) $\mathbf{L} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & bd & -ad \\ bd & a^2 + d^2 & ab \\ -ad & ab & b^2 + d^2 \end{bmatrix}$;

2.39 a) $-45\mathbf{i} - 10\mathbf{k}$;
b) 1.3764; −0.6067°
c) 0; 0;
d) 1.3764; −0.6067°;
e) El movimiento es rígido infinitesimal, razón por la cual no se pued
captar las deformaciones que se producen utilizando la teoría de l
deformaciones infinitesimales.

2.40 a) $\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 1/18 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

b) 63/162, 0 y – 45/162

2.41 a) $\sqrt{3}/4$;

b) Existen dos direccciones: $\mathbf{n}_1 = 0.9893\mathbf{i} - 0.1459\mathbf{j}$ y

$\mathbf{n}_2 = 0.1459\mathbf{i} - 0.9893\mathbf{j}$

2.43 a) $u=\dfrac{p}{ab}xy;\quad v=\dfrac{q}{ab}xy$;

b) $\theta' = \arccos\left[\dfrac{p^2+q^2+ap+bq}{\sqrt{(p+a)^2+q^2}\ \sqrt{(q+b)^2+p^2}}\right];\qquad \theta' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{ap+bq}{ab}$;

c) Se obtiene el mismo ángulo que el determinado con la teoría de las deformaciones finitas.

2.44 a) $u = y\,\text{sen}\,\alpha;\quad v = y(\cos\alpha - 1)$

b) $\varepsilon_x = 0;\quad \varepsilon_y = \cos\alpha - 1;\quad \gamma_{xy} = \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha;$

c) $L_x = 0;\quad L_y = 0;\quad L_{xy} = \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha;$

e) $h\sqrt{2(1+\text{sen}\,\alpha)};\qquad \dfrac{h}{\sqrt{2}}(1+\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)$

Capítulo 3

3.1 2761, 1085 y 0 kgf/cm^2

3.2 a) – 1.6, – 6.5 y – 17.1 kgf/mm^2;
b) 7.8 kgf/mm^2

3.3 Para los condiciones dadas, el material debería tener un módulo de Poisson igual a 0.54, lo cual no es posible.

3.4 25.8 kgf/mm^2

3.5 $\varepsilon_x = -8\times10^{-4}$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 1.6\times10^{-4}$; $\sigma_y = \sigma_z = -5$ kgf/mm^2

3.6 13.4, 3.6 y 0 kgf/mm^2;

3.7 a) $\varepsilon_x = 1.44\times10^{-4}$, $\varepsilon_y = 3.34\times10^{-4}$, $\varepsilon_z = -2.36\times10^{-4}$, $\gamma_{xy} = 15.2\times10^{-4}$, $\gamma_{yz} = 0$;
b) 105, 0 y –55 MPa
c) 17.6×10^{-4}, -2.36×10^{-4} y -12.8×10^{-4},

3.8 No es posible. La deformación ε_z debería ser -2.1×10^{-4}

3.9 La deformación tangencial máxima es 7.25×10^{-4}, mientras qu deformación tangencial máxima en el plano xy es 6.50×10^{-4}.

3.10 Sí es posible. El material debería tener un módulo de Poisson ν 0.

3.11 6.92×10^{-4}

3.12 a) $\varepsilon_x = 0.002$, $\varepsilon_y = -0.005$, $\gamma_{xy} = -0.002$; b) 2177 kgf/cm^2; c) 2177 kgf

3.13 $E' = \dfrac{E}{1-\nu^2},\quad \nu' = \dfrac{\nu}{1-\nu},\quad G' = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

3.14 335 MPa

3.15 Sí es posible, $\tau_{xy} = 0$ y $\varepsilon_z = 0$

3.16 a)677, 123 y 0 kgf/cm^2; b) 339 kgf/cm^2

3.17 117 MPa

3.18 $\begin{bmatrix} 3150 & -450 & 0 \\ -450 & 2250 & 0 \\ 0 & 0 & 1800 \end{bmatrix}$ kgf/cm^2

3.19 $\sigma_3 = 1297$ kgf/cm^2, $\sigma_2 = 0$ y $\sigma_1 = -457$ kgf/cm^2; $\tau_{máx} = 877$ kgf/cm^2

3.20 $2\delta(1-\nu)/\nu$

3.21 a) $F = \dfrac{E(a+2d)(c-e)ab}{c(a+2d) - a(c-e)\nu^2} = 841\,\text{ton}$;

b) La fuerza se incrementa aproximadamente en un 12 % :

$$F' = \frac{E(1-\nu)(a+2d)(c-e)ab}{(1+\nu)\left[c(a+2d)(1-\nu)^2 \quad a(c \quad e)\nu^2\right]} \qquad 948\,\text{ton}$$

3.22 $F = \dfrac{Ebh}{\nu} = 1.2\times10^{6}\,\text{N}$.

3.25 b) E = 206 GPa; S_y = 340 MPa; S_u = 446 MPa; S_f = 280 MPa; %alargamiento = 19.7 %.

3.29

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) - \alpha(1+\nu)\Delta T\right] \\ \sigma_y = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) - \alpha(1+\nu)\Delta T\right] \\ \sigma_z = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) - \alpha(1+\nu)\Delta T\right] \\ \tau_{xy} = \dfrac{E\gamma_{xy}}{(1+\nu)}; \qquad \tau_{xz} = \dfrac{E\gamma_{xz}}{(1+\nu)}; \qquad \tau_{yz} = \dfrac{E\gamma_{yz}}{(1+\nu)} \end{cases}$$

3.30 $\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E\alpha\Delta T \end{bmatrix}$; $\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha(1+\nu)\Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(1+\nu)\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Capítulo 4

4.1 No falla; $\sigma_3 - \sigma_1 = 22.4\ \text{kgf/mm}^2 < 25\ \text{kgf/mm}^2$

4.2 25 kgf/mm^2

4.3 No es posible. Por ejemplo, si el esfuerzo principal conocido es el menor, entonces el material no fallará si el mayor de los esfuerzos principales es menor que –10 kgf/mm^2, pero si este esfuerzo principal máximo es mayor o igual que –10 kgf/mm^2, entonces si fallaría.

4.4 Sí falla; $\sigma_3 - \sigma_1 = 849\ \text{MPa} > 300\ \text{MPa}$

4.5 No falla; $\sigma_3 - \sigma_1 = 13.4\ \text{kgf/mm}^2 < 30/2 = 15\ \text{kgf/mm}^2$

4.6 El material falla para $\sigma_x = 1791\ \text{kgf/cm}^2$ y $\sigma_x = -2375\ \text{kgf/cm}^2$.

4.7 300 MPa

4.8 a) $S_y/2$; b) $S_y/\sqrt{3}$

4.9 No falla. El esfuerzo de Tresca es 80 MPa, mientras que el de von Mises es 72 MPa.

4.10 a) $\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}$; b) σ_i=141.4 MPa, σ_{TRESCA}=200 MPa, $\sigma_{\text{Von MISES}}$ 173.2 MPa; c) No, pues su utilización es insegura

4.11 1418 kgf/cm^2

4.12 a) $\varepsilon_x = \dfrac{p}{A} + \dfrac{q-p}{AB}y$, $\varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{1-\nu}\left[\dfrac{p}{A} + \dfrac{q-p}{AB}y\right]$, $\gamma_{xy} = \dfrac{q-p}{2AB}x$, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$; el punto Q es el más crítico.

b) $\sigma = \dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} q/A & (1-\nu)(q-p)/2B & 0 \\ (1-\nu)(q-p)/2B & \nu q/A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) 38410 psi

4.13 392 MPa.

4.14 264 MPa.

4.15 a) 300 MPa; b) 150 MPa.

4.16 3940 kgf/cm^2.

4.17 Según Tresca, $\varepsilon = 6.25\times10^{-4}$; según von Mises, $\varepsilon = 7.22\times10^{-4}$.

4.18 100 MPa.

4.19 67.1 MPa

4.20 La pieza falla, $\sigma_3 - \sigma_1 = 38.1\ \text{kgf/mm}^2 > 30\ \text{kgf/mm}^2$.

4.21 90°.

4.22 45°.

4.23 a) 86.6 MPa; b) 0.

4.24 a) 1.2×10^{6} N; b) No falla; c) 2.1×10^{6} N.

Capítulo 5

5.6 b) $u = \dfrac{k}{E}xy \;;\; v = -\dfrac{k}{2E}(x^2 + \nu y^2 - \nu z^2) \;;\; w = -\dfrac{\nu k}{E}yz$

5.7 b) $u = \dfrac{k(1+\nu)}{2E}\left[(1-\nu)(x^2y - y^2) - \nu x^2 - \tfrac{1}{3}(2-\nu)y^3\right]$

$$v = \frac{k(1+\nu)}{2E}\left[(1-\nu)(2xy - \tfrac{1}{3}x^3) - \nu xy^2\right]$$

$$w = 0$$

5.8 b) $u = \dfrac{k(1+\nu)}{2E}\left[(1-\nu)x^2y + r^2y - \tfrac{1}{3}(2-\nu)y^3\right]$

$$v = \frac{k(1+\nu)}{2E}\left[-\nu xy^2 + r^2x - \tfrac{1}{3}(1-\nu)x^3\right]$$

$$w = 0$$

5.10 b)
$$\sigma_x = 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 F_x) + \left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\nabla \circ \mathbf{F})$$

$$\sigma_y = 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 F_y) + \left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\nabla \circ \mathbf{F})$$

$$\sigma_z = 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 F_z) + \left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\nabla \circ \mathbf{F})$$

$$\tau_{xy} = (1-\nu)\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 F_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 F_x)\right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\nabla \circ \mathbf{F})$$

$$\tau_{xz} = (1-\nu)\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 F_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 F_x)\right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(\nabla \circ \mathbf{F})$$

$$\tau_{yz} = (1-\nu)\left[\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 F_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 F_y)\right] - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\nabla \circ \mathbf{F})$$

5.13 c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36\times10^5\, y \end{bmatrix}$ MPa ; sí las satisface.

5.14 b)
$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\nabla^2\varphi\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\nabla^2\varphi\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\nabla^2\varphi\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} \;;\; \tau_{xz} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} \;;\; \tau_{yz} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z}$$

Capítulo 6

6.1 a) $\sigma_r = -\dfrac{b^2p}{b^2-a^2}\left[1-(a/r)^2\right];\; \sigma_\theta = -\dfrac{b^2p}{b^2-a^2}\left[1+(a/r)^2\right]$

c) Los puntos más críticos son aquellos situados en la superficie interi
La presión máxima que puede soportar es $(b^2 - a^2)S_y/2b^2$.

6.2 $p = \dfrac{\nu(b^2-a^2)p_o}{(1+\nu)a^2 + (1-\nu)b^2}$

6.3 a) $\sigma_r = \dfrac{a^3p}{b^3-a^3}\left[1-(b/r)^3\right];\; \sigma_\theta = \sigma_\phi = \dfrac{a^3p}{b^3-a^3}\left[1+\tfrac{1}{2}(b/r)^3\right]$

c) Los puntos más críticos son aquellos situados en la superficie interi
La presión máxima que puede soportar es $2(b^3 - a^3)S_y/3b^3$.
d) Para una relación de radios a/b dada, la esfera siempre resiste una mayor presión que el cilindro.

6.4 a) $\sigma_r = -\dfrac{b^3p}{b^3-a^3}\left[1-(a/r)^3\right];\; \sigma_\theta = \sigma_\phi = -\dfrac{b^3p}{b^3-a^3}\left[1+\tfrac{1}{2}(a/r)^3\right]$

c) Los puntos más críticos son aquellos situados en la superficie interi
La presión máxima que puede soportar es $2(b^3 - a^3)S_y/3b^3$.
d) Para una relación de radios a/b dada, la esfera siempre resiste una mayor presión que el cilindro.

6.5 a) $\mathbf{f} = -\rho g\,\mathbf{k}$

c) $u = -\dfrac{\nu\rho g}{E}x(z-L)\,;\quad v = -\dfrac{\nu\rho g}{E}y(z-L)\,;$

$w = \dfrac{\rho g}{2E}\left[z^2 - 2Lz + \nu(x^2+y^2)\right]$

d) $w(0,\,0,\,L) = -\dfrac{\rho g L^2}{2E}$

6.8 b) $k = -1/2$; c) $D = \pi G R^4/2$; d) $\tau_{xz} = -\dfrac{2M_t}{\pi R^4}\,y\,;\quad \tau_{yz} = \dfrac{2M_t}{\pi R^4}\,x\,;$

6.13 b) $k = -a^2b^2$.

Bibliografía

Resistencia de Materiales

ALMUSALLAM, A. & TAHER, S. E. "Three-Dimensional Mohr's Circle for Shear Stress Components", *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 121, No. 3, pp. 477-481, March, 1995.

ARGES, K. P. & PALMER, A. E. *Mecánica de los Materiales*. C.E.C.S.A., México, 1977.

BEDFORD, A. & LIECHTI, K. M. *Mecánica de Materiales*. Pearson Educación de Colombia Ltda., Bogotá, 2002.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. & DEWOLF, J. T. *Mechanics of Materials*. Third Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 2002.

BICKFORD, W. B. *Mechanics of Solids,Concepts and Applications*. Irwin, Inc., Boston, 1993.

BORESI, A. P.; SCHMIDT, R. J. & SIDEBOTTOM, O. M. *Advanced Mechanics of Materials*. Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

BOWES, W. H.; RUSSELL, L. T. & SUTER, G. T. *Mechanics of Engineering Materials*. JohnWiley & Sons, New York, 1984.

BYARS, E. F. & SNYDER, R. D. *Mecánica de Cuerpos Deformables*. Tercera Edición, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., México, 1978.

CERNICA, JOHN N. *Resistencia de Materiales*. C.E.C.S.A., México, 1982.